

# Capítulo 19

## Teorias de ordem superior

Este capítulo e as teorias nele apresentadas e detalhadas dizem respeito à tentativa de se obter uma teoria de placas que produza uma variação correta da solução dos deslocamentos e tensões ao longo da espessura. A dificuldade nesta tarefa pode ser entendida observando as soluções de Pagano [149] obtidas por elasticidade tridimensional. Neste ponto, o leitor pode se beneficiar de uma leitura da seção 13.2.5. Na Figura 13.12, página 363, observa-se que, para laminados delgados a variação de deslocamentos coplanares ao longo da espessura pode ser bem aproximada por uma reta. Para laminados mais espessos, a distribuição dos deslocamentos assume um comportamento cada vez mais diferente do linear, à medida que a relação espessura/comprimento cresce. As teorias de Kirchhoff e Mindlin preveem apenas variação linear, e por isso são capazes de prover apenas resultados aproximados, com erros às vezes acentuados nas tensões.

Uma outra observação útil dos resultados de Pagano refere-se à presença de tensões  $\sigma_z$ , mais acentuadas nos laminados espessos. Essa tensão é diretamente associada a  $\varepsilon_z$ , e esta por sua vez é associada a uma dependência de  $w$  com  $z$ , isto é,  $w = w(x, y, z)$ . As teorias de Kirchhoff e Mindlin, usando a hipótese de inextensibilidade,  $w = w(x, y)$ , não podem detectar diretamente  $\sigma_z$ , que, entretanto, é importante no processo de delaminação de um composto laminado.

### 19.1 Teorias de primeira ordem e de ordem superior

A forma genérica de produzir teorias que aproximem melhor a resposta ao longo da espessura, as chamadas *teorias de ordem superior*, consiste em trabalhar sobre as hipóteses cinemáticas a partir das quais todo o desenvolvimento subsequente é feito. Como exemplo, consideremos a seguir a teoria de Reddy [163], obtida por um ajuste na teoria proposta por Levinson [125] e Schmidt [179], e estendida por Reddy em [156] e [165].

Nessa teoria, parte-se do seguinte campo de deslocamentos:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^o(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\xi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y), \\ v(x, y, z) = v^o(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\xi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y), \\ w(x, y, z) = w(x, y). \end{cases} \quad (19.1)$$

Em vez de se restringir a uma variação linear dos deslocamentos coplanares, toma-se uma variação cúbica, o que explica o nome “teoria de ordem superior”. Note que ainda se mantém a inextensibilidade da normal na última equação.

As funções  $u^o$ ,  $v^o$  e  $w$  denotam os deslocamentos de um ponto de coordenada  $(x, y, 0)$  localizado na superfície de referência e  $\psi_x$  e  $\psi_y$  são as rotações dos segmentos normais à superfície em relação aos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente. As funções  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ ,  $\xi_x$  e  $\xi_y$  são dependentes apenas do ponto  $(x, y)$  e não possuem significado físico óbvio como as anteriores. Essas funções não podem ser arbitrárias, mas devem obedecer a relações que garantam que as tensões cisalhantes transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  se anulem nas superfícies inferior e superior da placa, isto é, que

$$\tau_{xz}(x, y, \pm H/2) = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{yz}(x, y, \pm H/2) = 0. \quad (19.2)$$

Para entender essa restrição, observamos as deformações cisalhantes transversais associadas a (19.1):

$$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = \psi_x + 2z\xi_x + 3z^2\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = \psi_y + 2z\xi_y + 3z^2\zeta_y + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (19.3)$$

Para uma lâmina ortotrópica com as fibras oblíquas em relação ao eixo  $x$  a relação constitutiva elástica é

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{45}^x & C_{55}^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (19.4)$$

Como a matriz elástica é não-singular, a nulidade das tensões implica a nulidade das deformações. Então, se substituirmos

$$\gamma_{xz}(x, y, \pm H/2) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{yz}(x, y, \pm H/2) = 0 \quad (19.5)$$

em (19.3), obteremos as condições

$$\begin{cases} \xi_x(x, y) = \xi_y(x, y) = 0, \\ \zeta_x(x, y) = -\frac{4}{3H^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right), \\ \zeta_y(x, y) = -\frac{4}{3H^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right). \end{cases} \quad (19.6)$$

O campo de deslocamentos em (19.1) será

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\psi_x + z^3 \left[ -\frac{4}{3H^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\ v(x, y, z) = v^0(x, y) + z\psi_y + z^3 \left[ -\frac{4}{3H^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \\ w(x, y, z) = w(x, y). \end{cases} \quad (19.7)$$

Observe que ao longo da espessura existem três termos em  $z$ : um deles constante,  $u^0$ , um de primeiro grau e um de terceiro grau. No total existem apenas 5 funções incógnitas,  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $w$ ,  $\psi_x$  e  $\psi_y$ , a mesma quantidade das teorias de primeira ordem. Isso torna essa teoria uma das mais eficientes que existem. Porém, existe uma séria restrição do ponto de vista de sua aplicabilidade a elementos finitos. Observe que o termo em  $z^3$  envolve derivadas de  $w$ . Isso significa que as deformações envolverão segundas derivadas de  $w$ . A expressão da forma fraca usada em elementos finitos terá, então, integrais sobre produtos entre termos  $w_{,xx}$ ,  $w_{,yy}$  e  $w_{,xy}$ , o que exige o uso de funções com primeiras derivadas contínuas, isto é, funções pertencentes ao espaço  $C^1(\Omega)$ . Isso também pode ser visto claramente em (19.7). Fisicamente  $u$  e  $v$  devem ser funções contínuas, o que implica que  $w_{,x}$  e  $w_{,y}$  devem ser  $C^0(\Omega)$ . No âmbito de soluções analíticas, esse fato não é restritivo, mas formulações de elementos finitos que exigem funções  $C^1(\Omega)$  são geralmente mais complexas e ainda menos satisfatórias. Muitas pesquisas foram realizadas sobre elementos de placas de Kirchhoff, que também devem ser  $C^1(\Omega)$ , e hoje são de certa forma evitados.

De qualquer forma a teoria de Reddy expressa em (19.7) serviu como ponto de partida para diversas teorias  $C^0(\Omega)$ , mais adequadas a elementos finitos, que sumarizamos a seguir. Na próxima seção ainda utilizaremos a teoria de Reddy para ilustrar a determinação das equações não-lineares de movimento.

### 19.1.1 Sumário das principais teorias

As teorias de diversos ordens podem ser expressas de forma concisa simplesmente pelas suas hipóteses cinemáticas. A seguir enumeramos algumas delas numa lista apenas ilustrativa, não exaustiva, em ordem de complexidade. Antigas revisões de diversas teorias de ordem superior podem ser encontradas em [40] e [128].

**a) Teoria de Kirchhoff**

$$\left\| \begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \right. \quad (19.8)$$

Essa é a teoria mais antiga, exige  $w \in C^1(\Omega)$ , e é a base da TCL. Para elementos finitos retangulares funciona muito bem com funções de Hermite. Uma formulação muito boa e usada é o DKT (Discrete Kirchhoff Triangle), elemento triangular de Batoz [38] para placas isotrópicas, que pode ser estendida para laminados como em [134]. Apesar de (19.8) envolver apenas três funções,  $u^0$ ,  $v^0$  e  $w$ , a implementação do DKT envolve cinco graus de liberdade por nó,  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $w$ ,  $\beta_x$  e  $\beta_y$ , sendo esses últimos as rotações da normal, incluídos para garantir a continuidade de rotação. Cinco graus de liberdade por nó é a mesma quantidade usada na teoria mais satisfatória de Mindlin.

**b) Teoria de Mindlin**

$$\left\| \begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \right. \quad (19.9)$$

É facilmente implementável em elementos finitos, pois exige apenas funções  $C^0(\Omega)$ . Apresenta resultados razoáveis em deslocamentos e tensões coplanares em placas semi-espessas mas, em geral, as formulações apresentam problemas de travamento (*locking*) em placas finas, isto é, rigidez excessiva. Faz uma aproximação ao cisalhamento transversal mas exige a presença de constantes de correção  $k_1$  e  $k_2$ .

**c) Teoria de terceira ordem de Reddy** É dada pelas eqs.(19.7). Exige elementos finitos  $C^1(\Omega)$ .

**d) Teoria de terceira ordem mista** A exigência de que  $w \in C^1(\Omega)$  na teoria de Reddy pode ser contornada com uma formulação mista obtida modelando as funções que multiplicam os termos  $z^3$  em (19.7) por novas funções, rotações de ordem superior  $\psi_{3x}(x, y)$  e  $\psi_{3y}(x, y)$ , isto é, considerando os deslocamentos na forma

$$\left\| \begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\psi_x + z^3\psi_{3x}, \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\psi_y + z^3\psi_{3y}, \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \right. \quad (19.10)$$

Esta é a formulação proposta por Levinson [125] como forma de alterar a formulação (19.7) para usar apenas funções  $C^0$ . É uma formulação diretamente implementável em elementos finitos.

**e) Teoria  $C^0$  de terceira ordem com termos quadráticos** Aparentemente foi proposta em 1992 por Kant [109] para análise não linear de placas laminadas e estendida em 1994 para cascas [108]. É baseada na expansão:

$$\left\| \begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\psi_x + z^2\psi_{2x} + z^3\psi_{3x}, \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\psi_y + z^2\psi_{2y} + z^3\psi_{3y}, \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \right. \quad (19.11)$$

**f) Teoria de terceira ordem com extensão da normal**

$$\left\| \begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\psi_x + z^3\psi_{3x}, \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\psi_y + z^3\psi_{3y}, \\ w(x, y, z) &= w^0(x, y) + z^2w_2(x, y). \end{aligned} \right. \quad (19.12)$$

Teoria introduzida por Kant e Owen [110] e Pandya e Kant [153]. Inclui o termo quadrático em  $w$ , o que produzirá deformações transversais  $\varepsilon_z$ .

**g) Teorias hierárquicas** Considera-se uma expansão em série de Taylor ao longo da espessura na forma:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0 + z\psi_x + z^2\psi_{2x} + z^3\psi_{3x} + \dots + z^n\psi_{nx}, \\ v(x, y, z) = v_0 + z\psi_y + z^2\psi_{2y} + z^3\psi_{3y} + \dots + z^n\psi_{ny}, \\ w(x, y, z) = w_0 + zw_1 + z^2w_2 + \dots + z^mw_m. \end{cases} \quad (19.13)$$

A cada quantidade de termos  $n$  e  $m$  corresponde uma diferente teoria de ordem  $n - m$ , e conforme  $n$  e  $m$  crescem a solução aproxima-se da solução tridimensional da placa. Uma proposição é a de modelar cada teoria de ordem  $n$  por elementos finitos, obter uma sequência de soluções até que a distribuição de erros seja satisfatória.

Embora exista pouca esperança de conseguir soluções analíticas para ordens maiores que  $m = 0$ ,  $n = 3$ , é possível obter o conjunto de equações do movimento com o respectivo conjunto de definições de deformações e esforços generalizados de placa que correspondem a cada teoria.

Algumas dessas teorias são detalhadas nas seções seguintes, em conjunto com as respectivas teorias de elementos finitos. Comparações entre as precisões obtidas por algumas dessas teorias são feitas na seção 19.6.

## 19.2 Equações do movimento da teoria de Reddy

Faremos aqui um detalhamento da teoria de Reddy conforme apresentado em [163], de forma a obter as equações do movimento consistentes com as hipóteses cinemáticas (19.7). Esse desenvolvimento é colocado aqui a título de exemplo. De fato, as equações de movimento, definição de esforços e deformações de placa e condições de contorno variacionalmente consistentes serão distintas para cada uma das formulações listadas na seção 19.1.1 e poderão ser deduzidas da forma padrão, como mostrado a seguir. De qualquer forma, este procedimento é o mesmo já utilizado no Capítulo 11 para o caso da placa laminada de Mindlin.

Parte-se, então, das eqs.(19.7) para os deslocamentos. As relações deformação-deslocamento lineares usadas são as relações lineares dadas em (11.37), página 299, de forma que se obtém:

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, y, z, t) = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x + z^3\kappa_{3x}, \\ \varepsilon_y(x, y, z, t) = \varepsilon_y^0 + z\kappa_{xy} + z^3\kappa_{3xy}, \\ \gamma_{xy}(x, y, z, t) = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} + z^3\kappa_{3xy}, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{xz}(x, y, z, t) = \gamma_{xz}^0 + z^2\kappa_{xz}, \\ \gamma_{yz}(x, y, z, t) = \gamma_{yz}^0 + z^2\kappa_{yz}, \\ \varepsilon_z(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \quad (19.14)$$

onde as deformações de placa na superfície de referência  $z = 0$  são:

$$\text{membrana } \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^0(x, y, t) \\ \varepsilon_y^0(x, y, t) \\ \varepsilon_{xy}^0(x, y, t) \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{l} u_{,x}^0 \\ v_{,y}^0 \\ u_{,y}^0 + v_{,x}^0 \end{array} \right\} \quad (19.15)$$

$$\text{cisalhamento transversal } \boldsymbol{\gamma}_c^0 = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^0(x, y, t) \\ \gamma_{xz}^0(x, y, t) \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{l} \psi_{y,y} + w_{,y} \\ \psi_{x,x} + w_{,x} \end{array} \right\} \quad (19.16)$$

As variações de curvatura de primeira ordem em (19.14) são

$$\text{curvaturas de 1ª ordem } \boldsymbol{\kappa} = \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x(x, y, t) \\ \kappa_y(x, y, t) \\ \kappa_{xy}(x, y, t) \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{l} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \end{array} \right\} \quad (19.17)$$

Finalmente, as curvaturas de ordem superior são

$$\left\| \begin{array}{l} u_n^o \quad \text{ou} \quad N_n, \quad \text{e} \\ u_t^o \quad \text{ou} \quad N_{nt}, \quad \text{e} \\ w \quad \text{ou} \quad Q_n, \quad \text{e} \\ w_{,n} \quad \text{ou} \quad M_{3n}, \quad \text{e} \\ \psi_n \quad \text{ou} \quad M_n, \quad \text{e} \\ \psi_t \quad \text{ou} \quad M_{nt}. \end{array} \right. \quad (19.28)$$

Note que nas equações de movimento, os termos que envolvem  $\{N\}$ ,  $\{M\}$ ,  $\{Q\}$  e  $\rho_o$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são os mesmos da teoria de primeira ordem. As condições de contorno são também idênticas em forma, exceto a quarta condição em (19.28).

As definições dos esforços no contorno são

$$\left\| \begin{array}{l} u_n^o = u^o n_x + v^o n_y, \\ N_n = N_x n_x^2 + N_y n_y^2 + 2N_{xy} n_x n_y, \\ M_{3n} = M_{3x} n_x^2 + M_{3y} n_y^2 + 2M_{3xy} n_x n_y, \\ M_n = \left( M_x - \frac{4M_{3x}}{3H^2} \right) n_x^2 + \left( M_y - \frac{4M_{3y}}{3H^2} \right) n_y^2 + 2 \left( M_{xy} - \frac{4M_{3xy}}{3H^2} \right) n_x n_y, \\ M_{nt} = \left( M_y - M_x + \frac{4(M_{3y} - M_{3x})}{3H^2} \right) n_x n_y + \left( M_{xy} - \frac{4M_{3xy}}{3H^2} \right) (n_x^2 - n_y^2), \\ Q_n = \left( Q_x - \frac{4Q_{3x}}{H^2} \right) n_x + \left( Q_y - \frac{4Q_{3y}}{H^2} \right) n_y - \frac{4}{3H^2} \frac{\partial M_{3nt}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} u_t^o = -u^o n_y + v^o n_x, \\ N_{nt} = (N_y - N_x) n_x n_y + N_{xy} (n_x^2 - n_y^2), \\ M_{3nt} = (M_{3y} - M_{3x}) n_x n_y + M_{3xy} (n_x^2 - n_y^2) \end{array} \right. \quad (19.29)$$

Note que estas expressões se revertem as expressões do caso de primeira ordem, eqs.(11.105), (11.71) e (11.105).

### 19.2.1 Relações esforços-deformações de placa

As relações tensão-deformação de uma lâmina, eqs.(19.19), podem ser substituídas nas definições dos esforços (19.21). Ajuntando as relações de deformação de placa, eqs.(19.14), e integrando ao longo da espessura, obtemos a relação esforços generalizados-deformações para esta teoria:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{3x} \\ M_{3y} \\ M_{3xy} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccccccc} A_{11} & A_{11} & A_{11} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & L_{11} & L_{12} & L_{16} & & \\ & A_{11} & A_{11} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & L_{12} & L_{22} & L_{26} & & \\ & & A_{11} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & L_{16} & L_{26} & L_{66} & & \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & & \\ & & & & D_{22} & D_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & & \\ & & & & & D_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & & \\ & & & & & & H_{11} & H_{12} & H_{16} & & \\ & & & & & & & H_{22} & H_{26} & & \\ & & & & & & & & H_{66} & & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \kappa_{3x} \\ \kappa_{3y} \\ \kappa_{3xy} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_y \\ Q_x \\ Q_{3y} \\ Q_{3x} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} A_{44} & A_{45} & D_{44} & D_{45} \\ & A_{55} & D_{45} & D_{55} \\ & & F_{44} & F_{45} \\ & & & F_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^o \\ \gamma_{xz}^o \\ \kappa_{yz} \\ \kappa_{xz} \end{array} \right\}, \quad (19.30)$$

ou, de forma compacta,

Rigidez	Esforços	Deformações generalizadas
$Q_{ij} - \text{N/m}^2$		$\kappa_{xz}, \kappa_{yz} - 1/\text{m}^2$
$A_{ij} - \text{N/m}$	$\mathbf{N} - \text{N/m}$	$\kappa_{3x}, \kappa_{3y}, \kappa_{3xy} - 1/\text{m}^3$
$B_{ij} - \text{N}$	$\mathbf{M} - \text{N}$	$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy} - 1/\text{m}$
$D_{ij} - \text{Nm}$	$\mathbf{M}_3 - \text{Nm}^2$	$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0 - \text{m/m}$
$F_{ij} - \text{Nm}^3$	$\mathbf{Q} - \text{N/m}$	
$H_{ij} - \text{Nm}^5$	$\mathbf{Q}_3 - \text{N}$	

Deve-se atentar com clareza a um detalhe concernente às teorias de ordem superior de forma geral. A cada teoria, representada por um conjunto de hipóteses cinemáticas do tipo (19.7), corresponde um particular conjunto de equações de movimento e condições de contorno, que podem ser obtidas de forma consistente pelo procedimento variacional mostrado. Um erro simples consiste em substituir apenas os esforços  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{Q}$  de (19.30) nas equações do movimento (11.51) da teoria de primeira ordem em vez de (19.27), obtendo um conjunto de equações em termos dos deslocamentos generalizados para resolver. Esse sistema será incorreto, embora o erro incorrido nos resultados numéricos seja frequentemente muito pequeno. Essa incorreção, referente à mistura de equações de diferentes ordens, foi incorrida por Levinson em seu trabalho pioneiro [125].

### 19.3 Solução analítica para laminado simétrico cruzado

Reddy [163] apresenta a solução analítica para a teoria de terceira ordem representada pelas equações (19.27) e (19.28) para o caso de uma placa de lâminas ortotrópicas cruzadas, orientadas a  $[0^\circ/90^\circ]$ , simétrica. A placa é retangular com bordas simplesmente apoiadas, submetida a uma carga transversal  $q(x, y)$ . Em [165], Reddy apresenta também a solução analítica para as frequências naturais.

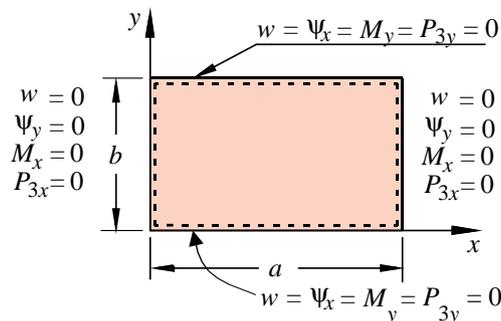
Como ilustração do processo, descreveremos aqui os principais pontos da solução ao problema de deflexão sob carga  $q$ .

Observando (19.34) e (19.30) para o laminado simétrico cruzado, observa-se que os seguintes valores de rigidez se anulam:

$$\left\| \begin{array}{l} [B] = [L] = [0] \\ (\cdot)_{16} = (\cdot)_{26} = (\cdot)_{45} = 0 \text{ para os termos de todas as matrizes,} \end{array} \right. \quad (19.36)$$

isto é, não há acoplamento membrana-flexão e extensão-cisalhamento.

Condições de contorno simplesmente apoiado podem ser modeladas de diversas formas. Reddy considera as seguintes condições, ilustradas na Figura 19.1.



**Figura 19.1:** Geometria e condições de contorno da placa.

As relações de deformação-deslocamentos generalizados (19.17)-(19.18) podem ser substituídas nas relações esforços-deformações (19.30), gerando relações esforços-deslocamentos. Essas relações, por sua vez, podem ser substituídas nas equações do movimento (19.27) e nas condições de contorno (19.28).

$$\mathbf{K}_{mn} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \Theta_{xmn} \\ \Theta_{ymn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ & M_{22} & M_{23} \\ sim. & & M_{33} \end{bmatrix}^{mn} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ \Theta_{xmn} \\ \Theta_{ymn} \end{Bmatrix} \omega^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (19.44)$$

A matriz  $\mathbf{M}^{mn}$  é a **matriz massa**, dada pelas componentes

$$\begin{aligned} M_{11} &= \rho_0 + \frac{4\rho_6}{3H^2} (\alpha_m^2 + \beta_n^2), \\ M_{12} &= \frac{4(\rho_4 - 4\rho_6/3H^2) \alpha_m}{3H^2}, \quad M_{22} = \rho_2 - \frac{8\rho_4}{3H^2} + \frac{16\rho_6}{9H^2}, \\ M_{13} &= -\frac{4(\rho_4 - 4\rho_6/3H^2) \beta_n}{3H^2}, \quad M_{23} = 0, \quad M_{33} = \rho_2 - \frac{8\rho_4}{3H^2} + \frac{16\rho_6}{9H^2}. \end{aligned} \quad (19.45)$$

O problema (19.44) é, portanto, um problema de autovalor clássico para cada um dos  $mn$ -ésimos modos de vibrações  $\{W_{mn}; \Theta_{xmn}; \Theta_{ymn}\}^T$  e frequência natural  $\omega_{mn}$ .

### 19.3.1 Resultados numéricos para flexão estática

Reddy em [165] apresenta resultados numéricos para flexão estática de placas ortotrópicas cruzadas simétricas de lâminas idênticas com as seguintes propriedades elásticas:

$$\begin{aligned} E_1 &= 172,25 \text{ GPa}, \\ E_2 = E_3 &= 6,89 \text{ GPa}, \quad G_{23} = 1,378 \text{ GPa}, \\ G_{12} = G_{13} &= 3,445 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25. \end{aligned} \quad (19.46)$$

As Tabelas 19.1 e 19.2 mostram resultados adimensionalizados para duas situações distintas:

- Tabela 19.1 – laminado  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  sob carga senoidal  $q(x, y) = q_0 \sin \pi x/a \cos \pi y/b$ . Placa quadrada.
- Tabela 19.2 – laminado  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  quadrado sob a carga senoidal usada na Tabela 19.1.

Os valores são adimensionalizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w \left( \frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0 \right) \frac{H^3 E_2 \cdot 100}{q_0 a^4}, & \bar{\sigma}_x &= \sigma_x \left( \frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{H}{2} \right) \frac{H^2}{q_0 a^2}, \\ \bar{\tau}_{yz} &= \tau_{yz} \left( \frac{a}{2}; 0; 0 \right) \frac{H}{q_0 a}, & \bar{\sigma}_y &= \begin{cases} \sigma_y \left( \frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{H}{6} \right) \frac{H^2}{q_0 a^2} \text{ na Tabela 19.1,} \\ \sigma_y \left( \frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{H}{4} \right) \frac{H^2}{q_0 a^2} \text{ na Tabela 19.2,} \end{cases} \\ \bar{\tau}_{xz} &= \tau_{xz} \left( 0; \frac{a}{2}; 0 \right) \frac{H}{q_0 a}, & \bar{\tau}_{xy} &= \tau_{xy} \left( 0; 0; \frac{H}{2} \right) \frac{H^2}{q_0 a^2}. \end{aligned} \quad (19.47)$$

A Tabela 19.1 mostra, além dos resultados da teoria de elasticidade obtidos por Pagano, resultados da teoria de primeira ordem para diversos valores da constante de cisalhamento  $k$ , onde se usou  $k_1 = k_2 = k$ . Observa-se que, não importa qual valor de  $k$  seja usado, os resultados da teoria de terceira ordem são bem melhores que os de primeira ordem. O mesmo se confirma na Tabela 19.2. Na Figura 19.2 aparecem distribuições de tensões cisalhantes transversais  $\tau_{yz}$  ao longo da espessura. Na Figura 19.2a temos os valores obtidos diretamente das relações constitutivas. Nota-se que, mesmo que a teoria seja de ordem superior, as tensões são incorretamente descontínuas, embora parabólicas ao longo de cada lâmina. Na Figura 19.2b aparecem os valores como obtidos por um pós-processamento pela integração das equações diferenciais de equilíbrio. Nota-se que também a teoria de terceira ordem, tanto quanto as demais, se beneficia com o processo.

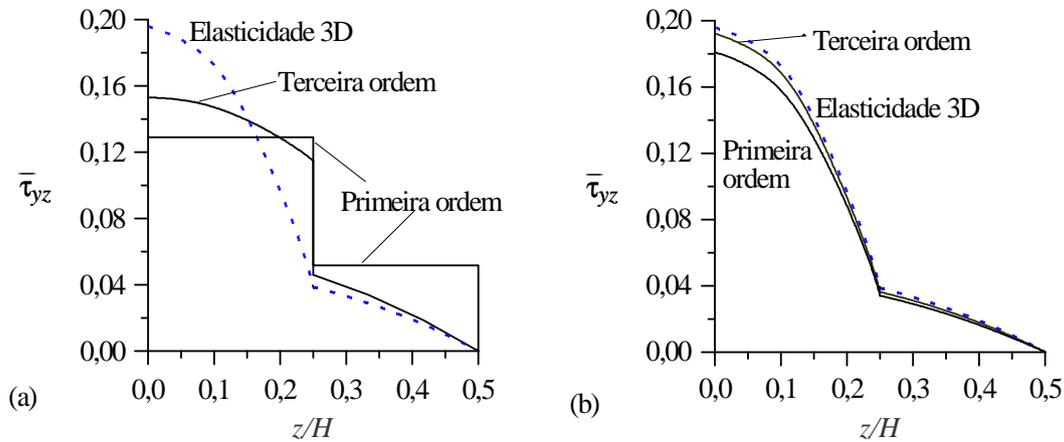
**Tabela 19.1:** Deflexões e tensões para laminado quadrado  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  sob carga senoidal simplesmente apoiado. Os valores entre parênteses são erros em relação à solução de elasticidade. Os resultados de cisalhamento transversal são obtidos diretamente pelas relações constitutivas.

$\frac{a}{H}$	Variável	3ª Ordem			1ª Ordem [164]		
		Elasticidade (1)	[163]	$k = 1$	$k = 5/6$	$k = 3/4$	$k = 1/2$
4	$\bar{w}$	2,0059	1,9218	1,5681	1,7763	1,9122	2,5769
	$\bar{\sigma}_x$	0,7548	0,7345	0,4475	0,4369	0,4308	0,4065
	$\bar{\tau}_{yz}$	0,21717	0,1835	0,1227	0,1562	0,1793	0,3030
10	$\bar{w}$	0,7530	0,7125	0,6306	0,6693	0,6449	0,8210
	$\bar{\sigma}_x$	0,590	0,5684	0,5172	0,5134	0,5109	0,4993
	$\bar{\tau}_{yz}$	0,12275	0,1033	0,0735	0,0915	0,1039	0,1723
100	$\bar{w}$	0,4347	0,4342	0,4333	0,4337	0,4340	0,4353
	$\bar{\sigma}_x$	0,5392	0,5390	0,5385	0,5384	0,5384	0,5382
	$\bar{\tau}_{yz}$	0,08282	0,0750	0,0586	0,0707	0,0782	0,1175

(1) Valores obtidos usando a formulação de Pagano [148], revista na seção 15.3.

**Tabela 19.2:** Deflexões e tensões para laminado quadrado  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  sob carga senoidal simplesmente apoiado. Tensões cisalhantes obtidas pelas relações constitutivas.

	$\frac{a}{H}$	Elasticidade [151]	Teoria de 3ª Ordem (erro %)	1ª Ordem [164] $k = 5/6$ (erro %)
$\bar{w}$	4	1,954	1,8937 (3,1)	1,7100 (12,5)
	10	0,743	0,7147 (3,8)	0,6628 (10,8)
	100	0,4385	0,4343 (0,96)	0,4337 (1,1)
$\bar{\sigma}_x$	4	0,720	0,6651 (7,6)	0,4059 (43,6)
	10	0,559	0,5456 (2,4)	0,4989 (10,8)
	100	0,539	0,5387 (3,6)	0,5382 (3,7)
$\bar{\sigma}_y$	4	0,663	0,6322 (4,6)	0,5765 (13,1)
	10	0,401	0,3888 (3,0)	0,3615 (9,9)
	100	0,276	0,2708 (1,9)	0,2705 (2,0)
$\bar{\tau}_{yz}$	4	0,292	0,2389 (18,2)	0,1963 (32,8)
	10	0,196	0,1531 (21,9)	0,1292 (34,1)
	100	0,141	0,1117 (20,8)	0,1009 (28,4)
$\bar{\tau}_{xz}$	4	0,291	0,2064 (29,1)	0,1398 (51,9)
	10	0,301	0,2640 (12,3)	0,1667 (44,6)
	100	0,337	0,2897 (14,0)	0,1780 (47,2)
$\bar{\tau}_{xy}$	4	0,0467	0,0440 (5,8)	0,0308 (34,0)
	10	0,0275	0,0268 (2,5)	0,0241 (12,4)
	100	0,0216	0,0213 (1,4)	0,0213 (1,4)



**Figura 19.2:** Distribuição típica de tensões cisalhantes  $\tau_{yz}$  ao longo da espessura, para laminado  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  quadrado sob carga senoidal com  $a/H = 10$ . (a) Obtido diretamente pelas relações constitutivas; (b) pós-processado pelas equações de equilíbrio. (Adaptado de Reddy [163].)

De forma geral, embora a teoria de terceira ordem aproxime muito melhor os resultados, é visível que ela não é completamente satisfatória, o que explica as diversas propostas listadas na Seção 19.1.1, e outras ainda sendo investigadas. Essas deficiências são visíveis na faixa de erros de  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  vistos na Tabela 19.2, atingindo até 30% na teoria de terceira ordem e até 50% na teoria de primeira ordem. Também as deficiências se manifestam na forma de descontinuidades nas interfaces como vistas na Figura 19.2a. Diversas causas dessas deficiências podem ser identificadas, como por exemplo:

- a) Embora as deformações verdadeiras possam ser aproximadamente parabólicas ao longo da espessura de cada lâmina, elas não são parabólicas ao longo de toda a espessura do laminado, como suposto na teoria.
- b) A teoria ignora as deformações e tensões normais  $\varepsilon_z$  e  $\sigma_z$ . A ausência desses valores afeta o balanço de forças e impede a satisfação correta das equações diferenciais de equilíbrio, gerando as descontinuidades em  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ , além de afetar os deslocamentos transversais.

### 19.4 Elemento finito $C^0$ de 3ª ordem com normal inextensível

Detalhemos aqui uma formulação de elementos finitos baseada nas hipóteses cinemáticas (19.10). Sivakumaran [186] apresenta formulações para esta teoria, porém restritas a laminados simétricos, onde não são incluídos os esforços normais. Apresentamos aqui, portanto, uma generalização para placas laminadas não-simétricas.

Parte-se das hipóteses cinemáticas representadas pelos deslocamentos (19.10), onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são dados pelos deslocamentos generalizados  $u^o$ ,  $v^o$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_{3x}$  e  $\psi_{3y}$ . As deformações associadas são

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^o + z\boldsymbol{\kappa} + z^3\boldsymbol{\kappa}_3, \\ \boldsymbol{\gamma}_c &= \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \gamma_{xz}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\gamma}_c^o + z^2\boldsymbol{\kappa}_c. \end{aligned} \tag{19.48}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^o$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  e  $\boldsymbol{\gamma}_c^o$  são as mesmas deformações da teoria  $C^1$  de Reddy, relacionadas aos deslocamentos por (19.15)-(19.17). Contudo, as variações de curvatura de ordem superior  $\boldsymbol{\kappa}_3$  e  $\boldsymbol{\kappa}_c$  são diferentes, dadas por

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^o(x, y) \\ \boldsymbol{\kappa}(x, y) \\ \boldsymbol{\kappa}_3(x, y) \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_f^e(x, y)_{9 \times 7n_{ne}} \mathbf{U}^e \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\gamma}_c^o(x, y) \\ \boldsymbol{\kappa}_c(x, y) \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_c^e(x, y)_{4 \times 7n_{ne}} \mathbf{U}^e} \quad (19.54)$$

$\mathbf{B}_f^e$  e  $\mathbf{B}_c^e$  são as chamadas matrizes de deformação do elemento  $e$ . Note que, implicitamente, ignoramos as dependências com o tempo, de forma a obter uma formulação estática. Os efeitos dinâmicos podem ser facilmente incorporados, como visto nas seções 18.4 e 19.5.

As deformações virtuais também são dadas pelas mesmas matrizes de deformação, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}} \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}}_3 \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_f^e(x, y) \hat{\mathbf{U}}^e \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_c^o \\ \hat{\boldsymbol{\kappa}}_c \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_c^e(x, y) \hat{\mathbf{U}}^e. \quad (19.55)$$

As matrizes do elemento finito  $C^o$  de terceira ordem são obtidas substituindo as relações constitutivas (19.30), as deformações (19.54) e as deformações virtuais (19.55) na expressão do princípio dos trabalhos virtuais (19.23), de forma a se chegar a um sistema algébrico para as equações de equilíbrio no elemento na forma (18.19), com as matrizes de rigidez e força do elemento definidas por:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K}_{f7n_{ne} \times 7n_{ne}}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{L} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{9 \times 9}^e \mathbf{B}_{f9 \times 7n_{ne}}^e dx dy, \\ \mathbf{K}_{c7n_{ne} \times 7n_{ne}}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_c^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{D}_c \\ \mathbf{D}_c & \mathbf{F}_c \end{bmatrix}_{4 \times 4}^e \mathbf{B}_{c4 \times 7n_{ne}}^e dx dy, \\ \mathbf{F}_{7n_{ne}}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} q(x, y) dx dy \end{aligned}} \quad (19.56)$$

Uma vez que essas matrizes sejam sobrepostas, elas produzirão o sistema algébrico global de equações de equilíbrio na forma  $[\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$ .

## 19.5 Elemento finito $C^o$ de 3<sup>a</sup> ordem com normal extensível

Apresentamos uma formulação de elemento finito  $C^o$  correspondente às hipóteses cinemáticas implícitas nas eqs.(19.12). Pandya e Kant [153] e Sivakumaran [186] apresentam elementos semelhantes, restritos a laminados simétricos. Aqui generalizamos a formulação para laminados não-simétricos.

Parte-se das hipóteses cinemáticas representadas pelos deslocamentos (19.12). As deformações correspondentes são

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \varepsilon_z(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} u_{,x}^o \\ v_{,y}^o \\ 0 \\ u_{,y}^o + v_{,x}^o \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^o} + z \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ 2w_2 \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\kappa}} + z^3 \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \psi_{3x,x} \\ \psi_{3y,y} \\ 0 \\ \psi_{3x,y} + \psi_{3y,x} \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\kappa}_3} \quad (19.57)$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \gamma_{xz}(x, y, z) \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\gamma}_c} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} w_{,y}^o + \psi_y \\ w_{,x}^o + \psi_x \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\gamma}_c^o} + z^2 \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} w_{2,y} + 3\psi_{3y} \\ w_{2,x} + 3\psi_{3x} \end{array} \right\}}_{\boldsymbol{\kappa}_c}.$$

Isso define as deformações generalizadas

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{yz}^o \\ \gamma_{xz}^o \\ \kappa_{yz} \\ \kappa_{xz} \end{array} \right\}_h^e = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & N_{1,y} & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & N_{1,x} & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_1 & N_{1,y} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_1 & 0 & N_{1,x} & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right]_{4 \times 8n_{ne}} \mathbf{U}^e(t), \quad (19.70)$$

nó 1
nó 2
nó  $n_{ne}$

ou, em notação compacta,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^o(x, y, t) \\ \kappa(x, y, t) \\ \kappa_3(x, y, t) \end{array} \right\}_h^e = [\mathbf{B}_f^e(x, y)]_{12 \times 8n_{ne}} \mathbf{U}^e(t) \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_c^o(x, y, t) \\ \kappa_c(x, y, t) \end{array} \right\}_h^e = [\mathbf{B}_c^e(x, y)]_{4 \times 8n_{ne}} \mathbf{U}^e(t) \quad (19.71)$$

$\mathbf{B}_f^e$  e  $\mathbf{B}_c^e$  são as matrizes de deformação do elemento “e”. As deformações virtuais são definidas em termos dos deslocamentos virtuais da mesma forma que as deformações reais em (19.71), isto é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\varepsilon}^o(x, y) \\ \hat{\kappa}(x, y) \\ \hat{\kappa}_3(x, y) \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_f^e(x, y) \hat{\mathbf{U}}^e \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\gamma}_c^o(x, y) \\ \hat{\kappa}_c(x, y) \end{array} \right\}_h^e = \mathbf{B}_c^e(x, y) \hat{\mathbf{U}}^e. \quad (19.72)$$

As matrizes do elemento finito com funções de aproximação de continuidade  $C^0(\Omega)$ , de terceira ordem, com normal extensível, são obtidas substituindo as relações (19.67), (19.69), (19.71) e (19.72) em (19.61) e (19.64). Isso resulta o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{f8n_{ne} \times 8n_{ne}}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{L} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \mathbf{B}_f^e_{12 \times 8n_{ne}} dx dy, \\ \mathbf{K}_{c8n_{ne} \times 8n_{ne}}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_c^{eT} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{D}_c \\ \mathbf{D}_c & \mathbf{F}_c \end{bmatrix}_{4 \times 4} \mathbf{B}_c^e_{4 \times 8n_{ne}} dx dy, \\ \mathbf{F}^e(t)_{8n_{ne} \times 1} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT}(x, y) q(x, y, t) dx dy, \\ \mathbf{M}_{8n_{ne} \times 8n_{ne}}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT}(x, y) \mathbf{m}_{8 \times 8}^e \mathbf{N}^e(x, y)_{8 \times 8n_{ne}} dx dy \end{aligned} \quad (19.73)$$

Depois de sobrepostas, essas matrizes produzirão o sistema algébrico de equações de movimento na forma (18.63).

## 19.6 Comparações numéricas dos elementos de 3ª ordem

Na Seção 19.1.1 apresentamos uma lista ilustrativa de algumas das teorias de ordem superior propostas na literatura, e que pode ainda ser usada como inspiração para diversas outras hipóteses. No Capítulo 18 e nas seções 19.4 e 19.5 apresentamos formulações de elementos finitos baseados em três dessas teorias, notadamente a teoria de primeira ordem de Mindlin, a de terceira ordem  $C^0(\Omega)$  com normal inextensível e a de terceira ordem  $C^0(\Omega)$  com normal extensível. Nesta seção procedemos à comparação de resultados obtidos por essas três teorias para o caso de laminados simétricos. Os valores numéricos, exceto onde indicado, foram obtidos por Sivakumaran [186].

As Tabelas 19.3 e 19.4 mostram resultados produzidos e compilados por Sivakumaran para um laminado simétrico de lâminas idênticas com  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , quadrado, simplesmente apoiado, sob

carga distribuída senoidal. Para permitir comparações, esse é o mesmo problema resolvido em diversos artigos, como o de Reddy [163] e [165]. As propriedades de cada lâmina são dadas na eq.(19.46). Para cada aspecto de placa  $a/H$ , são dados seis diferentes tipos de solução. São três soluções de elementos finitos, denotadas por  $MEF(b)$ ,  $MEF(d)$  e  $MEF(f)$ , baseados respectivamente nas teorias  $b)$ ,  $d)$  e  $f)$  da seção 19.1.1, página 468, isto é, teoria de primeira ordem (Mindlin) e de terceira ordem  $C^0(\Omega)$  com normal inextensível e extensível, respectivamente. Como termo de comparação são fornecidas três soluções analíticas obtidas por diferentes teorias. Uma delas, pela teoria tridimensional de elasticidade, obtida por Pagano [151] e comentada na Seção 15.3, página 394, outra solução pela teoria  $C^1(\Omega)$  de terceira ordem de Reddy [163] revista na Seção 19.3, página 476, e uma solução analítica pela teoria de primeira ordem obtida por Reddy [164].

**Tabela 19.3:** Deflexão e tensões em laminado simétrico  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  quadrado simplesmente apoiado sob carga distribuída senoidal.

$a/H$	Fonte	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$
4	$MEF(b)$	1,6813 (13,2)	0,4111
	$MEF(d)$	1,8688 (3,5)	0,7306(-1,5)
	$MEF(f)$	1,8750 (3,2)	0,7163 (0,51)
	Elasticidade [151]	1,9367	0,7200
	3ª Ordem [163]	1,8937(2,2)	0,6651 (7,6)
	1ª Ordem [164]	1,7100 (11,7)	0,4059 (31,4)
10	$MEF(b)$	0,6388 (13,3)	0,5067 (9,4)
	$MEF(d)$	0,6961 (5,5)	0,5730 (-2,5)
	$MEF(f)$	0,7185 (2,5)	0,5676 (-1,5)
	Elasticidade [151]	0,7370	0,5590
	3ª Ordem [163]	0,7147 (3,0)	0,5456 (2,4)
	1ª Ordem [164]	0,6628 (10,1)	0,4989 (10,8)
20	$MEF(b)$	0,4674 (8,9)	0,5363 (1,2)
	$MEF(d)$	0,4840 (5,6)	0,5535 (-1,9)
	$MEF(f)$	0,5076 (1,0)	0,5503 (-1,3)
	Elasticidade [151]	0,5128	0,5430
	3ª Ordem [163]	0,5060 (1,3)	0,5393 (0,68)
	1ª Ordem [164]	0,4912 (4,2)	0,5273 (2,9)
100	$MEF(b)$	0,4097 (5,8)	0,5459 (-1,3)
	$MEF(d)$	0,4104 (5,6)	0,5466 (-1,4)
	$MEF(f)$	0,4346 (0,02)	0,5442 (-0,96)
	Elasticidade [151]	0,4347	0,5390
	3ª Ordem [163]	0,4343 (0,09)	0,5387 (0,06)
	1ª Ordem [164]	0,4337 (0,2)	0,5382 (0,15)

Fonte: Sivakumaran [186].

$MEF(b)$ ,  $MEF(d)$  e  $MEF(f)$  são soluções de elementos finitos obtidas pelas teorias  $b)$ ,  $d)$  e  $f)$  vistas na Seção 19.1.1.

Valores entre parênteses são erros, % em relação à solução elástica.

Os valores calculados são deslocamentos e tensões, adimensionalizadas conforme eq.(19.47), página 479. Para facilitar a análise dos resultados incluímos entre parênteses o valor do erro relativo à solução elástica de Pagano.

As soluções de elementos finitos foram obtidas por uma modelagem de  $1/4$  da placa, com  $2 \times 2$  elementos quadrados. A integração é feita por  $3 \times 3$  e  $2 \times 2$  pontos de Gauss para as matrizes de rigidez de flexão e cisalhamento, respectivamente.

Observa-se dos resultados que, de forma geral, as diversas teorias aproximam melhor a solução

elástica para as placas finas que as soluções de placas espessas. Isso ocorre para o deslocamento e para tensões coplanares, como esperado, uma vez que em placas finas os deslocamentos efetivamente variam de forma aproximadamente linear ao longo da espessura. Aqui as soluções de elementos finitos de primeira ordem e a analítica de primeira ordem fornecem resultados aceitáveis. O mesmo não ocorre para as tensões cisalhantes transversais, que apresentam erros grosseiros qualquer que seja o aspecto de placa.

Por outro lado, as soluções de ordem superior, de elementos finitos ou analíticas, aproximam muito melhor os resultados de elasticidade. Nota-se que os resultados de elementos finitos de primeira ordem se aproximam dos resultados analíticos de primeira ordem, e o mesmo ocorre para terceira ordem, como esperado. Porém, apesar de substancialmente menores, esses erros ainda se situam na faixa de 5% na teoria *d*) de normal inextensível na deflexão e tensões coplanares, em placas de  $a/H$  iguais a 10 ou 20, uma faixa muito usada em componentes. Conquanto essa faixa de erros seja aceitável em certas aplicações de engenharia, em outros casos são ainda demasiado grandes. Isso aponta claramente para a necessidade do desenvolvimento de teorias mais acuradas. A teoria *f*) é um desses casos, em que se nota que, com a inclusão de uma deformação linear em  $z$  do segmento normal, os resultados, denotados por  $MEF(f)$ , mostram redução nos erros em quase todos os casos.

Os erros nas tensões cisalhantes transversais em geral se situam em patamares muito superiores às demais tensões, na faixa de 17% ou mais nas teorias de terceira ordem e de até 45% para primeira ordem. Esses valores foram obtidos pelas relações constitutivas e, em geral, valores mais acurados podem ser obtidos pela integração das equações de equilíbrio.

## 19.7 Exercícios

- 19.1 Aplique integração por partes em (19.24) e obtenha as equações do movimento (19.27) e as condições de contorno (19.28).
- 19.2 Mostre como as equações de movimento (19.27) e esforços no contorno (19.29) se revertem às expressões da teoria de Mindlin.
- 19.3 Obtenha as relações constitutivas (19.31) a partir de (19.19), (19.21) e (19.14).
- 19.4 Integre as expressões (19.32) e obtenha (19.34).
- 19.5 Obtenha as matrizes de rigidez (19.35) para o caso de placa de uma única lâmina de espessura  $H$ , com  $\theta = 0^\circ$ .
- 19.6 Substitua as relações deformação-deslocamentos generalizados (19.17)-(19.18) nas relações entre os esforços e as deformações, eq.(19.30), obtendo as relações esforços-deslocamentos generalizados.
- 19.7 Substitua as relações esforços-deslocamentos obtidas no exercício 6 nas equações do movimento (19.27) e nas condições de contorno (19.28) para um laminado geral. Simplifique o laminado conforme (19.36) e obtenha (19.37)-(19.39).
- 19.8 Mostre que a expansão em série (19.40) satisfaz as condições de contorno indicadas na Figura 19.1.
- 19.9 Substitua as expansões (19.40) e (19.41) nas equações do movimento (19.37)-(19.39) e obtenha (19.42).
- 19.10 Obtenha o problema de autovalor (19.44) para as frequências naturais da placa ortotrópica simplesmente apoiada pela teoria de terceira ordem de Reddy.
- 19.11 Obtenha a matriz massa de um elemento  $C^0$  de terceira ordem de Reddy (deslocamentos (19.10)). (Dica: use a expansão (19.50) e siga os passos da Seção 18.4).

