

Materiais Compostos e Estruturas-sanduíche  
 Projeto e Análise

Dados para contato com os autores:  
Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC  
Departamento de Engenharia Mecânica  
paulo.tarso@ufsc.br  
CP 476 - Florianópolis, SC - 88040-900

Materiais Compostos e Estruturas-sanduíche  
 Projeto e Análise

Paulo de Tarso R. Mendonça, Ph.D.



Copyright © 2019 Editora Orsa Maggiore.

Projeto gráfico, ilustrações: Paulo de Tarso R. Mendonça  
Editoração eletrônica: Paulo de Tarso R. Mendonça  
Capa: Maria Elisa Ramos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M539m Mendonça, Paulo de Tarso R.,  
Materiais compostos e estruturas-sanduíche :  
projeto e análise / Paulo de Tarso R. Mendonça.  
.  
Florianópolis, SC : Orsa Maggiore, 2019.  
577 p.: il., tabs., gráfs.  
  
Inclui bibliografia.  
ISBN 978-85-907153-1-3  
  
1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Engenharia  
mecânica. 3. Estruturas-sanduíche. 4. Materiais  
compostos. 5. Projeto estrutural. I. Título.

O4-7628

CDD-624.17

Índices para catálogo sistemático:

1. Materiais compostos e estruturas-sanduíche :  
Projeto e análise : Engenharia civil 624.17

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores. É proibida a reprodução por xerox.

1ª edição - 2005

2ª edição - 2019

Direitos adquiridos pela:  
Editora Orsa Maggiore.  
[www.OrsaMaggiore.com.br](http://www.OrsaMaggiore.com.br)

Impresso no Brasil  
*Printed in Brazil*

# Sobre o autor

O prof. Paulo de Tarso possui graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade de Brasília (1980), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (1983) e doutorado em Engenharia Mecânica no Departamento de Engenharia Aeroespacial da Universidade de Minnesota (1995). No período de 2012/2013 realizou atividades de pesquisa no *Laboratoire de Mécanique et Technologie* da *École Normale Supérieure de Cachan*, França, na área de estimativa *a-posteriori* de erros em modelos numéricos. Desde 1984 trabalha na Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, onde atualmente é Professor Titular. Concentra suas atividades na área de Mecânica dos Sólidos Computacional, atuando principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento do método de elementos finitos, com ênfase em elementos finitos generalizados, modelagem do comportamento de componentes mecânicos de materiais compostos e estimativa de erros de modelagem e de modelo.

# Sumário

Prefácio	xv
Lista de símbolos	xix
Lista de tabelas, fluxogramas e sumários	xxii
Unidades	xxiii
<b>I Projeto de Compostos e Estruturas-sanduíche</b>	<b>1</b>
1 Tipos e propriedades de compostos, fibras e matrizes	3
2 Revisão de elasticidade linear	37
3 Micromecânica de uma lâmina	47
4 Macromecânica de uma lâmina	73
5 Viga delgada isotrópica	111
6 Análise de um laminado	125
7 Tensões higrotérmicas	169
8 Projeto e análise de vigas laminadas	193
9 Estruturas-sanduíche	241
10 Projeto de placas-sanduíche	267
<b>II Análise de Laminados e Estruturas-sanduíche</b>	<b>289</b>
11 Formulação do problema de placas laminadas	291
12 Flexão de placas delgadas laminadas	327
13 Tensões interlaminares e teoria de primeira ordem	345
14 Vibrações de placas laminadas	369
15 Análise de placas-sanduíche	383
16 Estabilidade e carga crítica de flambagem	405
17 Instabilidade local em painéis-sanduíche	427
18 Análise de compostos por elementos finitos –1a ordem	439
19 Teorias de ordem superior	467
20 Modelos de camadas discretas e teorias zig-zag	493
21 Piezoelasticidade e estruturas inteligentes	511
Bibliografia	537
Índice Remissivo	549

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xix</b>
<b>Lista de tabelas, fluxogramas e sumários</b>	<b>xxii</b>
<b>Unidades</b>	<b>xxiii</b>
<b>I Projeto de Compostos e Estruturas-sanduíche</b>	<b>1</b>
<b>1 Tipos e propriedades de compostos, fibras e matrizes</b>	<b>3</b>
1.1 Definição e tipos de material composto . . . . .	3
1.1.1 Compostos reforçados por fibras . . . . .	5
1.2 Tipos e propriedades de fibras . . . . .	10
1.2.1 Fibras de vidro . . . . .	10
1.2.2 Fibras de carbono e grafite . . . . .	15
1.2.3 Fibras de kevlar . . . . .	16
1.2.4 Fibras de monocristais – <i>Whiskers</i> . . . . .	16
1.2.5 Asbesto . . . . .	16
1.2.6 Fibras cerâmicas . . . . .	17
1.3 Tipos e propriedades das matrizes . . . . .	17
1.3.1 Polímeros . . . . .	17
1.3.2 Aditivos . . . . .	21
1.3.3 Poliéster e epóxi . . . . .	22
1.3.4 Plásticos fenólicos . . . . .	22
1.4 Processos de fabricação de compostos . . . . .	23
1.4.1 Processo manual . . . . .	24
1.4.2 Processo manual por <i>spray</i> . . . . .	27
1.4.3 Cuidados gerais de segurança e higiene . . . . .	27
1.4.4 Bobinamento . . . . .	28
1.4.5 Trefilação de perfis estruturais . . . . .	30
1.4.6 Moldagem por membrana . . . . .	31
1.4.7 Processo com preformados . . . . .	32
1.4.8 Outros processos de fabricação . . . . .	34
1.5 Exercícios . . . . .	35
<b>2 Revisão de elasticidade linear</b>	<b>37</b>
2.1 Tensões . . . . .	37
2.2 Deslocamentos e deformações . . . . .	39
2.3 Relações tensão-deformação – Lei de Hooke . . . . .	42
2.4 Equações de equilíbrio . . . . .	42
2.5 Estado plano de tensões e transformação de tensões . . . . .	43
2.5.1 Transformação plana de tensões . . . . .	43

2.6	Exercícios . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Micromecânica de uma lâmina</b>	<b>47</b>
3.1	Propriedades mecânicas . . . . .	47
3.2	Coefficientes de dilatação térmica e de umidade . . . . .	49
3.2.1	Coefficientes de dilatação proveniente da umidade . . . . .	51
3.2.2	Frações de massa e de volume . . . . .	51
3.3	Módulo e resistência longitudinal à tração . . . . .	55
3.3.1	Resistência à ruptura em tração longitudinal . . . . .	58
3.4	Módulo e resistência transversal à tração . . . . .	58
3.4.1	Modelos de elasticidade . . . . .	60
3.4.2	Modelos de Halpin-Tsai e de CCA . . . . .	61
3.4.3	Ruptura transversal à tração . . . . .	64
3.5	Módulo de elasticidade cisalhante $G_{12}$ . . . . .	66
3.6	Coefficientes de Poisson . . . . .	67
3.7	Resistência longitudinal à compressão . . . . .	68
3.8	Coefficientes de dilatação térmica . . . . .	70
3.9	Exercícios . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Macromecânica de uma lâmina</b>	<b>73</b>
4.1	Relação tensão-deformação para materiais elástico-lineares . . . . .	73
4.1.1	Efeito térmico e higroscópico . . . . .	74
4.1.2	Constantes de engenharia para materiais ortotrópicos . . . . .	75
4.2	Lei de Hooke para material ortotrópico sob EPT . . . . .	79
4.2.1	Lâmina isotrópica sob estado plano de tensões . . . . .	80
4.3	Rotação da relação tensão-deformação em estado plano de tensões . . . . .	80
4.3.1	Matriz de flexibilidade reduzida transformada . . . . .	83
4.4	Constantes de engenharia para lâminas angulares em EPT . . . . .	84
4.5	Rotação da matriz de rigidez em torno do eixo 3 . . . . .	87
4.6	Resistência de uma lâmina ortotrópica . . . . .	92
4.7	Critérios de falha para uma lâmina ortotrópica . . . . .	94
4.7.1	Teoria da tensão máxima . . . . .	94
4.7.2	Teoria da deformação máxima . . . . .	96
4.7.3	Teoria de Hill . . . . .	98
4.7.4	Critério de Tsai-Wu . . . . .	104
4.7.5	Critério de Hoffman . . . . .	106
4.7.6	Critério de Hashin . . . . .	107
4.8	Exercícios . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Viga delgada isotrópica</b>	<b>111</b>
5.1	Teoria de Timoshenko para flexão de viga . . . . .	111
5.1.1	Estática . . . . .	114
5.1.2	Lei de Hooke . . . . .	115
5.1.3	Síntese das equações diferenciais de viga . . . . .	117
5.1.4	Solução de casos de vigas de Bernoulli . . . . .	118
5.2	Fórmulas para vigas . . . . .	119
5.2.1	Fatores de cisalhamento $k$ para vigas isotrópicas . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Análise de um laminado</b>	<b>125</b>
6.1	Teoria clássica de laminação – TCL . . . . .	125
6.2	Casos especiais de laminados . . . . .	130
6.2.1	Laminados monolâminas . . . . .	130
6.2.2	Laminados simétricos . . . . .	131
6.2.3	Laminado cruzado . . . . .	132

6.2.4	Laminados simétricos angulares . . . . .	133
6.2.5	Laminados anti-simétricos . . . . .	133
6.3	Determinação das tensões e deformações nas lâminas . . . . .	135
6.4	Análise de resistência do laminado . . . . .	147
6.4.1	Análise de falha inicial . . . . .	147
6.4.2	Eliminação de propriedades de lâminas . . . . .	150
6.4.3	Falhas subsequentes . . . . .	151
6.4.4	Tensões imediatamente antes e depois do ponto de falha . . . . .	152
6.4.5	Carregamento inicial . . . . .	153
6.5	Placas metálicas com <i>stiffeners</i> e grelhas metálicas . . . . .	163
6.5.1	Grelha simétrica . . . . .	165
6.5.2	Grelha assimétrica . . . . .	165
6.6	Exercícios . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Tensões higrotérmicas</b> . . . . .	<b>169</b>
7.1	Deflexão em vigas bimateriais sob efeito térmico . . . . .	169
7.1.1	Efeito térmico na viga . . . . .	171
7.1.2	Tensões térmicas em cada lâmina . . . . .	174
7.1.3	Tensões mecânicas e efetivas nas lâminas . . . . .	174
7.1.4	Exemplo 1 – Deslocamentos em um bimetal . . . . .	176
7.1.5	Exemplo 2 – Tensões em bimetal . . . . .	177
7.1.6	Exemplo 3 – Tensões residuais térmicas em viga al-aço-al . . . . .	178
7.2	Tensões térmicas em painéis laminados . . . . .	179
7.2.1	Tensões térmicas em cada lâmina . . . . .	181
7.2.2	Tensões mecânicas e efetivas nas lâminas . . . . .	182
7.3	Cargas de ruptura do laminado . . . . .	182
7.3.1	Exemplo 4 – Resistência de laminado com efeitos térmicos . . . . .	186
7.4	Exercícios . . . . .	191
<b>8</b>	<b>Projeto e análise de vigas laminadas</b> . . . . .	<b>193</b>
8.1	Análise de vigas laminadas longas de seção plana . . . . .	193
8.1.1	Tensões interlaminares . . . . .	196
8.2	Módulos de elasticidade equivalente – Homogeneização . . . . .	197
8.2.1	Método da rigidez do material . . . . .	198
8.2.2	Método da flexibilidade do material . . . . .	199
8.2.3	Laminados simétricos ortotrópicos . . . . .	200
8.2.4	Síntese das propriedades equivalentes em vigas planas . . . . .	201
8.3	Tensões normal e cisalhante em vigas laminadas planas . . . . .	201
8.4	Seções não-planas – Perfis estruturais . . . . .	202
8.4.1	Tração simples de barras de seção não-plana . . . . .	203
8.4.2	Relação entre as definições do módulo equivalente . . . . .	204
8.5	Flexão em seção não-plana – Fases isotrópicas ou ortotrópicas . . . . .	209
8.5.1	Casos particulares de flexão – Fases homogêneo-isotrópicas ou ortotrópicas . . . . .	211
8.5.2	Flexão de viga de seção tubular anisotrópica . . . . .	213
8.6	Torção de eixos . . . . .	217
8.6.1	Torção de barras de seção circular . . . . .	217
8.6.2	Torção de tubos de seção fechada de paredes finas . . . . .	220
8.6.3	Torção de tubos de camadas ortotrópicas angulares . . . . .	224
8.7	Limitações no uso das fórmulas . . . . .	227
8.7.1	Concentração de tensões . . . . .	228
8.8	Deflexão de vigas planas de Timoshenko . . . . .	228
8.8.1	Solução para diversos casos práticos . . . . .	232
8.8.2	Processo simplificado para vigas de Timoshenko . . . . .	233
8.8.3	Vigas hiperestáticas . . . . .	235

8.9	Exercícios . . . . .	237
<b>9</b>	<b>Estruturas-sanduiche</b>	<b>241</b>
9.1	Aplicação de estruturas-sanduiche . . . . .	241
9.1.1	Aspectos gerais dos sanduiches . . . . .	242
9.2	Adesivos e construção de painéis-sanduiche . . . . .	244
9.3	Modos de falha . . . . .	247
9.4	Unões, fechamentos e conexões . . . . .	249
9.5	Manufatura de colmeias . . . . .	252
9.6	Propriedades e ensaios de núcleos e sanduiches . . . . .	253
9.6.1	Cisalhamento de núcleos . . . . .	255
9.6.2	Propriedades compressivas de núcleos . . . . .	257
9.6.3	Ensaio em núcleos e sanduiches . . . . .	258
9.7	Espumas – Tipos e propriedades . . . . .	259
9.8	Fases – Materiais e propriedades . . . . .	259
9.9	Avaliação das constantes elásticas de uma colmeia . . . . .	259
9.9.1	Densidade de uma colmeia . . . . .	263
9.9.2	Colmeia isotrópica . . . . .	264
9.9.3	Minimização da densidade da colmeia . . . . .	265
9.10	Exercícios . . . . .	265
<b>10</b>	<b>Projeto de placas-sanduiche</b>	<b>267</b>
10.1	Flexão de vigas-sanduiche . . . . .	268
10.1.1	Rigidez flexural da viga-sanduiche . . . . .	268
10.1.2	Tensão normal . . . . .	269
10.1.3	Tensões cisalhantes . . . . .	269
10.1.4	Correção da área para a deformação cisalhante . . . . .	271
10.1.5	Solução para flexão de vigas-sanduiche . . . . .	272
10.1.6	Exemplo 1 – Rigidez relativa de vigas homogênea e sanduiche . . . . .	272
10.1.7	Flambagem de vigas-sanduiche . . . . .	274
10.2	Flexão de placas-sanduiche . . . . .	274
10.3	Deflexão de placa-sanduiche retangular . . . . .	276
10.4	Minimização de peso para rigidez flexural dada . . . . .	278
10.5	Minimização de peso com momento fletor dado . . . . .	281
10.6	Rotina de cálculo para sanduiches . . . . .	281
10.6.1	Exemplo 2 – Otimização de placa-sanduiche sob flexão . . . . .	285
10.6.2	Exemplo 3 – Sanduiche com núcleo de espuma de poliuretano . . . . .	287
10.7	Exercícios . . . . .	288
<b>II</b>	<b>Análise de Laminados e Estruturas-sanduiche</b>	<b>289</b>
<b>11</b>	<b>Formulação do problema de placas laminadas</b>	<b>291</b>
11.1	Equações de movimento e cinemáticas . . . . .	291
11.1.1	Tensões . . . . .	294
11.1.2	Segundo tensor tensão do Piola-Kirchhoff $\sigma$ . . . . .	296
11.2	Equações diferenciais para placas laminadas . . . . .	299
11.2.1	Equações de movimento do laminado . . . . .	300
11.2.2	Relações cinemáticas e constitutivas . . . . .	304
11.3	Método dos Resíduos Ponderados e condições de contorno . . . . .	306
11.3.1	Formulação de Kirchhoff para placas delgadas . . . . .	313
11.4	Forma fraca do problema . . . . .	317
11.5	Soluções aproximadas – Método de Galerkin . . . . .	318
11.6	Formas integrais em flexão . . . . .	321

11.6.1	Energia potencial elástica . . . . .	322
11.6.2	Energia cinética de uma placa . . . . .	322
11.6.3	Energia potencial das cargas externas . . . . .	323
11.6.4	Princípio da energia potencial mínima . . . . .	323
11.6.5	Método de Ritz . . . . .	323
11.7	Exercícios . . . . .	324
<b>12</b>	<b>Flexão de placas delgadas laminadas</b>	<b>327</b>
12.1	Placas delgadas ortotrópicas . . . . .	327
12.1.1	Placas retangulares simplesmente apoiadas . . . . .	327
12.1.2	Solução de Levy – Placa com dois lados apoiados . . . . .	331
12.1.3	Método energético – Placa delgada retangular engastada . . . . .	333
12.2	Laminado delgado angular simétrico . . . . .	336
12.3	Laminado delgado cruzado anti-simétrico . . . . .	338
12.4	Laminado delgado angular anti-simétrico . . . . .	342
12.5	Exercícios . . . . .	344
<b>13</b>	<b>Tensões interlaminares e teoria de primeira ordem</b>	<b>345</b>
13.1	Cisalhamento numa barra laminada sob tração . . . . .	346
13.1.1	Solução pela TCL . . . . .	346
13.1.2	Solução pela teoria de elasticidade linear . . . . .	348
13.2	Cisalhamento em flexão . . . . .	350
13.2.1	Teoria de Mindlin para laminados . . . . .	350
13.2.2	Flexão cilíndrica de laminados ortotrópicos – Modelo de 1ª ordem . . . . .	352
13.2.3	Flexão cilíndrica de laminados ortotrópicos – TCL . . . . .	355
13.2.4	Flexão cilíndrica de laminados ortotrópicos – Solução de elasticidade . . . . .	357
13.2.5	Flexão cilíndrica – Comparação de resultados . . . . .	360
13.3	Flexão de laminado retangular – Teoria de primeira ordem . . . . .	361
13.4	Fator de cisalhamento $k$ para placa ortotrópica homogênea . . . . .	364
13.4.1	Método de Timoshenko . . . . .	365
13.4.2	Método de Reissner . . . . .	365
13.5	Fator $k$ para placas ortotrópicas laminadas . . . . .	366
13.6	Exercícios . . . . .	368
<b>14</b>	<b>Vibrações de placas laminadas</b>	<b>369</b>
14.1	Placa delgada simétrica ortotrópica . . . . .	369
14.2	Placa delgada anti-simétrica cruzada . . . . .	371
14.3	Placa delgada anti-simétrica angular . . . . .	375
14.4	Placa delgada simétrica angular – Método energético . . . . .	377
14.5	Exercícios . . . . .	382
<b>15</b>	<b>Análise de placas-sanduíche</b>	<b>383</b>
15.1	Teoria de primeira ordem para placas-sanduíche . . . . .	383
15.1.1	Equações do movimento em placa-sanduíche de faces delgadas . . . . .	387
15.2	Flexão cilíndrica de sanduíche – 1ª ordem . . . . .	389
15.2.1	Tensões . . . . .	391
15.2.2	Placas-sanduíche de faces isotrópicas . . . . .	393
15.3	Soluções exatas para laminados e sanduíches retangulares . . . . .	394
15.3.1	Lâminas transversamente isotrópicas . . . . .	400
15.3.2	Resultados numéricos para sanduíche retangular . . . . .	400
15.4	Solução de primeira ordem para sanduíche retangular . . . . .	402
15.5	Exercícios . . . . .	403

<b>16 Estabilidade e carga crítica de flambagem</b>	<b>405</b>
16.1 Estabilidade de placas – Método do equilíbrio adjacente . . . . .	406
16.2 Formas integrais em flambagem . . . . .	411
16.2.1 Energia potencial . . . . .	412
16.2.2 Placas laminadas delgadas . . . . .	413
16.3 Flambagem de vigas laminadas delgadas . . . . .	415
16.4 Flambagem de vigas laminadas semi-espessas . . . . .	417
16.5 Placa retangular ortotrópica sob compressão biaxial . . . . .	418
16.5.1 Caso I – $N_{yo} = 0$ – Compressão uniaxial . . . . .	419
16.5.2 Caso II – $N_{xo} = N_{yo}$ – Compressão biaxial, placa quadrada . . . . .	420
16.5.3 Caso III – $N_{xo} < 0$ e $N_{yo} > 0$ – Compressão e tração . . . . .	421
16.6 Placa sob cisalhamento – Método de Galerkin . . . . .	421
16.7 Placa anisotrópica sob compressão e cisalhamento . . . . .	423
16.8 Exercícios . . . . .	426
<b>17 Instabilidade local em painéis-sanduiche</b>	<b>427</b>
17.1 Flambagem de viga sobre apoio elástico . . . . .	427
17.1.1 Soluções em núcleos de espessura infinita e finita . . . . .	429
17.1.2 Sumário das soluções . . . . .	432
17.2 <i>Wrinkling</i> em placas-sanduiche com núcleo homogêneo . . . . .	436
17.3 Corrugados e colmeias – <i>Dimpling</i> e <i>wrinkling</i> . . . . .	437
17.3.1 <i>Dimpling</i> . . . . .	437
17.4 Exercícios . . . . .	438
<b>18 Análise de compostos por elementos finitos – 1ª ordem</b>	<b>439</b>
18.1 Flexão estática de placas compostas . . . . .	440
18.1.1 Polinômios Lagrangeanos . . . . .	441
18.1.2 Mapeamento dos deslocamentos no elemento . . . . .	442
18.1.3 Continuidade interelementar . . . . .	443
18.1.4 Matriz de rigidez e vetor força do elemento . . . . .	444
18.2 Integração e subintegração . . . . .	446
18.2.1 Integração numérica . . . . .	447
18.2.2 Sobreposição e condições de contorno . . . . .	450
18.2.3 Cálculo das tensões . . . . .	450
18.2.4 Extração de tensões . . . . .	452
18.3 Tensões higrotérmicas . . . . .	453
18.4 Frequências naturais e carregamentos dinâmicos . . . . .	454
18.4.1 Frequências naturais de vibrações . . . . .	456
18.5 Flambagem e matriz geométrica . . . . .	456
18.6 Elemento de casca degenerada laminada . . . . .	458
18.6.1 Geometria de um elemento quadrilateral de casca . . . . .	458
18.6.2 Campo de deslocamentos . . . . .	461
18.6.3 Deformações e tensões nas lâminas . . . . .	462
18.6.4 Transformações . . . . .	463
18.6.5 Integração e subintegração . . . . .	465
<b>19 Teorias de ordem superior</b>	<b>467</b>
19.1 Teorias de primeira ordem e de ordem superior . . . . .	467
19.1.1 Sumário das principais teorias . . . . .	468
19.2 Equações do movimento da teoria de Reddy . . . . .	470
19.2.1 Relações esforços-deformações de placa . . . . .	474
19.3 Solução analítica para laminado simétrico cruzado . . . . .	476
19.3.1 Resultados numéricos para flexão estática . . . . .	479
19.4 Elemento finito $C^0$ de 3ª ordem com normal inextensível . . . . .	481

19.5	Elemento finito $C^0$ de 3 <sup>a</sup> ordem com normal extensível . . . . .	483
19.6	Comparações numéricas dos elementos de 3 <sup>a</sup> ordem . . . . .	487
19.7	Exercícios . . . . .	490
<b>20</b>	<b>Modelos de camadas discretas e teorias zig-zag</b>	<b>493</b>
20.1	Modelo básico de camada discreta . . . . .	495
20.1.1	Observação gerais . . . . .	498
20.2	Modelos zig-zag . . . . .	498
20.2.1	Modelos de di Sciuva - Ambartsumian . . . . .	499
20.2.2	Formato alternativo dos modelos de di Sciuva - Ambartsumian . . . . .	501
20.2.3	Modelo global-local de ordem superior . . . . .	504
<b>21</b>	<b>Piezoelasticidade e estruturas inteligentes</b>	<b>511</b>
21.1	Estruturas inteligentes . . . . .	512
21.1.1	Conceitos básicos de sistemas de controle . . . . .	513
21.2	Equações governantes de Piezoelasticidade linear 3D . . . . .	513
21.2.1	Equações diferenciais governantes do tipo Navier . . . . .	517
21.2.2	Rotação da relação constitutiva 3D em torno do eixo 3 . . . . .	517
21.2.3	Relações constitutivas em estado plano . . . . .	518
21.3	Forma fraca e princípio de mínimo . . . . .	521
21.3.1	Forma variacional para estado plano de tensões . . . . .	523
21.4	Tipos de modelagem de placas laminadas híbridas . . . . .	523
21.4.1	Forma variacional para modelos de Reissner-Mindlin/camada discreta . . . . .	524
21.5	Modelo de elementos finitos . . . . .	528
21.6	Resultados numéricos . . . . .	533
21.6.1	Solução analítica . . . . .	533
21.7	Resultados de EF para os modelos Mindlin-camada discreta . . . . .	534
21.8	Exercícios . . . . .	536
	<b>Bibliografia</b>	<b>537</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>549</b>



# Prefácio

Num certo aspecto, o ensino de engenharia mecânica e, conseqüentemente, a formação do engenheiro no início do século XXI têm sido bastante similares ao que ocorria no início do século XX. A capacidade de pensar, projetar, dimensionar e realizar demais operações de cálculo estrutural era restrita ao uso das ferramentas simples fornecidas pelo que hoje se denomina Resistência dos Materiais, aplicada a materiais metálicos, predominantemente aos aços.

Aproximadamente a partir da década de 1950, uma série de novos tipos de materiais estruturais tem sido utilizada com sucesso. Os materiais compostos por plásticos reforçados por fibras, desenvolvidos e aplicados inicialmente na indústria aeroespacial-militar, difundiram-se posteriormente para outros tipos de componentes e sistemas que hoje se tornaram presença comum nos artigos consumidos e usados no dia-a-dia.

Apesar das vantagens oferecidas pelos materiais compostos em relação aos aços e demais materiais comuns em alguns tipos de aplicação, o seu uso correto pelo engenheiro ainda não é generalizado em razão de alguns fatores, como:

- ▷ As propriedades mecânicas são diferentes dos aços e suas características e formas de determinação são, em geral, mais complexas;
- ▷ Têm processos de fabricação próprios;
- ▷ As ferramentas simples de cálculo da Resistência dos Materiais, em geral, não funcionam para esses materiais.

Conseqüentemente, mesmo o dimensionamento de um componente simples como uma viga sob flexão exige, por vezes, uma teoria e um procedimento próprios. O presente livro trata os materiais compostos do ponto de vista de projeto de componentes estruturais e não sob a perspectiva da ciência do material. Parte do seu conteúdo pode ser vista como uma forma de proporcionar ao engenheiro a capacidade de realizar projetos em componentes simples de materiais compostos, análoga à capacitação obtida nas sequências de disciplinas tradicionais para o trabalho com materiais isotrópicos. Adicionalmente, o leitor deve adquirir uma introdução a tópicos que lhe permitam prosseguir em etapas mais avançadas de pesquisa e desenvolvimento.

O texto é dividido em duas grandes partes. A **Parte I** é adequada para cursos de graduação e pós-graduação, enquanto a **Parte II** apresenta uma sequência de tópicos avançados, adequada a cursos de pós-graduação. A Parte I apresenta o conteúdo clássico do assunto, que pode ser visto em livros clássicos. Esse conteúdo, porém, é apresentado aqui em linguagem clara, com deduções detalhadas e sequências de exemplos trabalhados também pormenorizadamente. O resultado é que temos tido sucesso ao adotar o conteúdo deste livro em cursos nos quais os alunos possuem apenas conhecimento introdutório correspondente a um semestre em Mecânica dos Sólidos, envolvendo tensões e deslocamentos em vigas e barras sob flexão e torção, transformação de tensões e critérios de falha.

O **objetivo** da Parte I é habilitar o leitor a projetar e analisar estruturas simples constituídas por laminados planos ou levemente curvos constituídos por lâminas de resina reforçadas por fibras contínuas ou descontínuas. Ao final da Parte I, o leitor deverá ser capaz de:

- ▷ Identificar se um dado componente pode ser vantajosamente construído por material composto e fazer a escolha do tipo mais adequado e do processo de fabricação;
- ▷ Identificar propriedades mecânicas importantes e escolher os ensaios mecânicos necessários para a determinação desses valores;
- ▷ Dadas as propriedades mecânicas de um certo tipo de fibra e matriz, estimar as propriedades da lâmina constituída por elas;
- ▷ Dadas as propriedades elásticas das lâminas (em forma matricial), nas suas direções principais, obter as matrizes de rigidez elástica do laminado;
- ▷ Dadas as matrizes de rigidez e os valores de esforços num ponto do laminado, obter deformações e tensões em cada lâmina;
- ▷ Usar valores das tensões nas direções principais de propriedades de uma lâmina e verificar sua segurança segundo um dos critérios de falhas estudados;
- ▷ Entender os aspectos e modos de falha principais de painéis sanduíche e fazer dimensionamentos em geometrias usuais;
- ▷ Considerar os efeitos termoelásticos no dimensionamento de compostos.

A Parte I é, de certa forma, completa em seu conteúdo; assim, um curso de pós-graduação pode apresentar em seu início toda a Parte I, de forma rápida, e, em seguida, entrar na Parte II. Isso geralmente é necessário, porque frequentemente o estudante de pós-graduação jamais foi exposto ao assunto em seu curso de graduação. O conteúdo inicial deve ser a ele ministrado, ainda que de forma acelerada ou selecionando apenas alguns tópicos como os Capítulos 1 (Tipos e propriedades de compostos, fibras e matrizes), 4 (Macromecânica de uma lâmina) e 6 (Análise de um laminado).

Os **conteúdos e métodos de apresentação** das Partes I e II foram cuidadosamente escolhidos da seguinte forma:

- A Parte I caracteriza-se principalmente por formas algébricas. Soluções de problemas de elementos estruturais importantes em engenharia, como barras e vigas, são desenvolvidas ou simplesmente apresentadas. Frequentemente, as fórmulas serão aproximativas, visando apenas às etapas iniciais de dimensionamento no projeto. Rotinas de cálculo são exaustivamente desenvolvidas, explicadas e exemplificadas. Em geral, buscam-se situações em que a solução pode ser obtida diretamente das relações constitutivas, como no caso de vigas isostáticas e alguns tipos de placas, em que os esforços em uma seção podem ser obtidos por equilíbrio global ou por simples inspeção. Dessa maneira, a carga matemática sobre o estudante fica reduzida, permitindo espaço para discussões sobre os fenômenos físicos característicos dos materiais compostos.
- Na Parte II, a ênfase encontra-se na dedução detalhada das equações gerais dos problemas, tanto em sua forma diferencial, i.e., as equações cinemáticas e do movimento (ou de equilíbrio) local, quanto na forma integral, i.e., o Princípio dos Trabalhos Virtuais ou o Princípio da Mínima Energia Total. Os principais comportamentos mecânicos dos compostos são considerados:
  - comportamentos estático e dinâmico;
  - estabilidade;
  - efeito termoelástico;
  - efeito piezoelétrico em estruturas inteligentes;
  - modos de falha.
- Esses efeitos são analisados a partir de soluções exatas ou aproximadas obtidas a partir dos problemas de valor no contorno envolvido. Torna-se intensa a manipulação de formas integrais como o Método de Galerkin e o Método de Elementos Finitos para placas e cascas, baseados em modelos cinemáticos de primeira ordem, de ordem superior e modelos de camada discreta.

## Modificações na segunda edição

Todo o texto foi revisado, modificando certas notações para uma forma visualmente mais agradável. Dois grandes tópicos foram incorporados. No novo Capítulo 20 é detalhando o método de elementos finitos aplicado aos principais modelos de camadas discretas e teorias zig-zag. Junto aos capítulos de elementos finitos baseados em modelos de Mindlin-Reissner e em modelos de ordem superior, nos Capítulos 18 e 19, se tem o detalhamento de praticamente todos os métodos mais usuais de modelagem de painéis laminados. No novo Capítulo 21 se faz uma apresentação completa das equações gerais de piezoelasticidade usadas em estruturas inteligentes, e das principais formulações de elementos finitos usadas em sua discretização.

### Outras observações

Uma quantidade de valores de propriedades mecânicas de materiais e outras informações úteis em cálculo foram incluídas no texto e distribuídas ao longo dos capítulos. Uma lista de tabelas, figuras e fluxogramas encontra-se na página xxii a seguir. Deve-se observar que os valores de propriedades apresentados são apenas valores indicativos, médios, adequados ao uso na resolução dos exercícios e para cálculos preliminares em projeto. Isso porque, propriedades de polímeros, principalmente, mas também de fibras e metais, são fortemente dependentes da composição e do processo de fabricação. Frequentemente, as propriedades devem ser obtidas por ensaio direto, a partir de amostras obtidas de cada lote.

O texto apresenta uma grande quantidade de formulações, que se apresentam desde a forma de equações simples até formulações de elementos finitos. Com exceção do Capítulo 3, de micromecânica, as formulações foram deduzidas no texto, buscando-se, em cada caso, a forma mais clara possível de explicá-las. Frequentemente, os gráficos comparativos de resultados que acompanham cada teoria foram construídos usando os mesmos dados dos artigos de referência. Entretanto, **todas as formulações** apresentadas foram programadas pelo autor como parte de trabalhos de iniciação científica, de dissertações de mestrado ou teses de doutorado, desenvolvidas no Grante. Esses programas, ou partes deles, foram desenvolvidas em linguagens como Mathematica<sup>®</sup>, Fortran<sup>®</sup> e usados para a geração dos gráficos de resultados mostrados no texto.

## Agradecimentos

Agradecemos ao prof. Domingos Boechat Alves, que primeiro vislumbrou que a obra era necessária e que poderíamos realizá-la; ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro; ao prof. Clovis Sperb de Barcellos, que acompanhou todo o processo elaboração, além de revisar diversos capítulos.

O trabalho foi desenvolvido nas dependências e com os recursos de infraestrutura do Grante, Grupo de Análise e Projeto Mecânico do Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina – a cujos professores desejamos agradecer o apoio. Agradecemos aos professores Edison da Rosa, Lauro Cezar Nicolazzi, Eduardo A. Fancello e José Carlos Pereira pela leitura crítica dos diversos capítulos. O texto foi digitado por Nichele Antunes, as figuras e os modelos numéricos foram preparados pelos graduandos André Labanowski Jr., Diego J. Dall’Agnol, Thiago Guinzani Felipe, Cristian Mangoni, Peterson L. Zacharias, José Mario R. de Oliveira e Paulo Damiani, a quem agradecemos pela dedicação durante o longo trabalho. Não podemos esquecer a paciência e as contribuições das diversas turmas das disciplinas de Materiais Compostos em graduação e pós-graduação que sofreram com as várias versões intermediárias e incompletas do texto.

## Lista de símbolos

Um grande esforço foi despendido no desenvolvimento de uma notação única e homogênea ao longo de toda a obra, de forma a garantir que não houvesse duas grandezas diferentes representadas pelo mesmo símbolo no mesmo ambiente, com chances de serem confundidas. Simultaneamente, procurou-se respeitar as notações já consagradas na literatura, onde elas existissem. Isso eventualmente resultou numa situação peculiar, em que o sanduíche, com suas diversas partes, pode usar a notação regular dos laminados ou a notação consagrada dos sanduíches. Para as direções principais do núcleo, por exemplo, pode-se usar a notação 1-2 ou  $L$ - $W$ .

Deve-se ressaltar que manter notação única numa obra deste porte reserva alguns perigos, como a proliferação de índices. De modo a minorar esse efeito, usa-se o mesmo símbolo para designar grandezas escalares, vetoriais e matriciais, como entidades que devem ser vistas como distintas. Por exemplo, o número de lâminas no laminado é designado por  $N$ , um vetor ou matriz de funções teste de elementos finitos é indicado por  $\mathbf{N}(x, y)$ .

### Índices superiores e inferiores

$R_i$	- $i$ -ésima falha do laminado.
$T$	- transposta de uma matriz quando índice superior.
$t$	- tempo, tração ou direção tangencial quando índice inferior.
$T, U$	- térmico ou higroscópico quando índice superior.
$l_k$	- $k$ -ésima lâmina do laminado. Contada em ordem crescente com a cota $z$ .
$k$	- $k$ -ésima lâmina do laminado. Usado alternativamente a $l_k$ , quando possível.
$x$	- sistema de eixos $x$ - $y$ - $z$ .
1	- sistema principal de eixos da lâmina, 1-2-3.
$o$	- valor na superfície de referência do laminado ou placa.
$\bullet$	- barra indica o perfil de esforços, de deformações ou de tensões.
$i$	- valor na superfície inferior de uma lâmina. Índice superior ou inferior.
$s$	- valor na superfície superior de uma lâmina. Índice superior ou inferior.
$f$	- fibra.
$m$	- matriz do composto.
$\cdot_v$	- vazios no composto.
$(\cdot)_{,x}$	- diferenciação de uma função $\partial(\bullet)/\partial x$ , também $(\bullet)'$ .
$\hat{\cdot}$	- função peso.
$\cdot_e$	- $e$ -ésimo elemento finito.
$\cdot_h$	- aproximação de uma função por elementos finitos ou outro método.
$f_1, f_2$	- faces inferior e superior de um painel-sanduíche.
$n$	- núcleo de um painel-sanduíche.
$m, n$	- número de harmônico em soluções em série, nas direções $x$ e $y$ .

### Símbolos

$\{ \}$	- componentes de um arranjo unidimensional de valores de funções. Também vetores.
$[ \ ]$	- componentes de um arranjo bidimensional de valores ou funções. Também matrizes.
$\mathbf{v}$	- (símbolo em negrito) vetor ou tensor, de componentes $\{v\}$ ou $[v]$ .
$\Omega, \Gamma$	- domínio e contorno da superfície média de uma placa.
TCL	- Teoria clássica de laminação.
PTV	- Princípio dos trabalhos virtuais.

## Variáveis

$\varepsilon$	- deformação total num ponto.
$\sigma$	- tensões num ponto.
$\varepsilon^o, \kappa$	- deformações e curvaturas da superfície de referência de uma placa.
$\mathbf{N}, \mathbf{M}$	- esforços coplanares e de momentos no laminado, (6.13), (6.20).
$\mathbf{Q}$	- esforços cortantes $\{Q_y; Q_x\}^T$ no laminado, (11.59).
$\mathbf{N}^T, \mathbf{M}^T$	- esforços térmicos coplanares e de momentos no laminado, (7.54).
$\mathbf{S}, \bar{\mathbf{S}}$	- matriz de flexibilidade de uma lâmina nas direções 1-2 e $x$ - $y$ , eqs. (4.11), (4.26), (4.55).
$N_v, Q_v$	- esforços normais, cortante de viga, em unidades de força.
$M_v, M_t$	- momentos fletor e torçor em viga, em unidades de força-comprimento
$\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}$	- matriz de rigidez reduzida de uma lâmina nas direções 1-2 e $x$ - $y$ , eqs. (4.28), (4.51).
$\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$	- matriz de rigidez do laminado e suas partições, (6.19).
$\mathbf{C}', \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{D}'$	- matriz de flexibilidade do laminado e suas partições, (6.34).
$\mathbf{T}$	- matriz de transformação plana de coordenadas, (2.26), (4.38).
$\gamma_c$	- deformações cisalhantes transversais $\{\gamma_{yz}; \gamma_{xz}\}^T$ .
$\tau_c$	- tensões cisalhantes transversais $\{\tau_{yz}; \tau_{xz}\}^T$ .
$\mathbf{C}_c^{xk}$	- matriz elástica da lâmina $k$ nas direções $x$ - $y$ para as tensões transversais, (4.77), (11.58).
$\mathbf{A}_c$	- matriz de rigidez do laminado para cisalhamento transversal, $= \sum h_k \mathbf{C}_c^{xk}$ , (11.60).
$\mathbf{E}$	- matriz de rigidez do laminado para cisalhamento transversal, $k[\mathbf{A}_c]$ , (11.61).
$p(x), q(x)$	- carga distribuída em viga e placa, força/comprimento, força/área.
$a, b$	- dimensões de uma placa retangular nas direções $x$ e $y$ .
$r, R$	- $r = b/a$ , $R = a/b$ em uma placa retangular.
$l$	- comprimento de uma viga.
$b, H$	- largura e espessura da seção de uma viga de seção plana.
$k$	- fator de correção ao cisalhamento transversal em viga ou placa.
$k$	- contador para lâminas.
$S$	- perímetro médio de uma seção tubular fechada.
$G_t$	- módulo cisalhante equivalente de barra sob torção (8.117).
$A, A_k$	- área de seção transversal de uma viga e de uma lâmina $k$ , ou área cheia dentro do perímetro.
$A_s$	- área de deformação cisalhante para vigas-sanduiche de faces espessas (10.23).
$E_x^k$	- módulo de elasticidade na direção $x$ da $k$ -ésima lâmina, (4.67).
$\nu_{xy}^k, G_{xy}^k$	- coeficiente de Poisson e módulo no plano $x$ - $y$ da $k$ -ésima lâmina, (4.67).
$E_{xF}, E_{xN}$	- módulos de viga sob flexão e tração, (8.31), (8.32)

$\nu_{xyF}, \nu_{xyN}$	- coeficiente de Poisson equivalente de viga sob flexão e carga axial.
$S_y^k$	- 1º momento de inércia da $k$ -ésima lâmina em relação ao eixo $y$ da seção.
$D_v$	- módulo de rigidez flexural equivalente da viga, eq.(8.40).
$D_x$	- módulo de rigidez flexural aproximada de placa-sanduiche, eq.(10.34).
$\xi$	- fator para cálculo de tensão de enrugamento de sanduíches (17.29).
$h_a$	- espessura da camada de adesivo numa colméia.
$h_k$	- espessura da lâmina $k$ -ésima.
$H$	- espessura do laminado ou do painel-sanduiche.
$H_n$	- espessura do núcleo de um painel-sanduiche.
$H_m$	- espessura de um painel-sanduiche, entre as superfícies médias das faces.
$z_k, \bar{z}_k$	- cota da superfície inferior da lâmina $k$ e de sua superfície média.
$N$	- número de lâminas do laminado.
$\gamma^n$	- deformação cisalhante no núcleo de um painel-sanduiche.
$V_f, V_m$	- fração volumétrica de fibras e de matriz num composto.
$V_v$	- fração volumétrica de vazios.
$M_f, M_m$	- fração mássica de fibras e resina num composto.
$m_f, m_m$	- massa de fibras e matriz num composto.
$m_c$	- massa do composto.
$\rho_f, \rho_m$	- densidade da fibra e de matriz num composto.
$\rho_c$	- densidade do composto, ou densidade da chapa de colmeia.
$\rho$	- densidade de um material.
$\rho_n$	- densidade do núcleo de um sanduíche.
$E, G, \nu$	- módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson.
$X_t, X_c$	- valores de resistência de uma lâmina à tração e à compressão na direção 1.
$Y_t, Y_c$	- valores de resistência de uma lâmina à tração e à compressão na direção 2.
$Z_t, Z_c$	- valores de resistência de uma lâmina à tração e à compressão na direção 3.
$S$	- valores de resistência de uma lâmina ao cisalhamento no plano 1-2.
$S_1, S_2$	- resistência de uma lâmina ao cisalhamento nos planos 1-3 e 2-3.
$u, v, w$	- funções de deslocamento em um ponto de coordenadas $(x, y, z)$ .
$E_x^n, E_x^f$	- módulos de elasticidade do núcleo e face de um sanduíche, na direção $x$ .
$E_y^n, E_y^f$	- módulos de elasticidade do núcleo e face de um sanduíche, na direção $y$ .
$G_{xz}^n, G_{WT}$	- módulos de elasticidade do núcleo de um sanduíche, no plano $xz$ ou $WT$ .
$G_{yz}^n, G_{LT}$	- módulos de elasticidade do núcleo de um sanduíche, no plano $yz$ ou $LT$ .
$\nu_{xy}^n, \nu_{xy}^f$	- coeficiente de Poisson do núcleo e face de um sanduíche no plano $xy$ .
$E_3, E_T$	- módulos de elasticidade de núcleo de um sanduíche, na direção 3 ou $T$ .
$R_i$	- $i$ -ésima falha do laminado, Figura 6.21, página 154.
$R_i$	- $i$ -ésimo intervalo de carga no laminado, entre as falhas $R_{i-1}$ e $R_i$ .
$C_{R_i}$	- fator de carga na $i$ -ésima falha (6.60).
$T, \Delta T$	- temperatura, diferença entre temperatura de trabalho e de cura.
$U$	- concentração de umidade no composto.
$\alpha, \beta$	- coeficiente de dilatação térmica e higroscópica.
$\alpha^1, \alpha^x$	- coeficientes de dilatação térmica de uma lâmina nas direções 1-2 e $x-y$ , (7.50).
$d\epsilon_x^{T,lk}$	- deformação na lâmina desacoplada das demais, (7.13), (7.14).
$t\epsilon_x^{T,lk}$	- deformação térmica total na lâmina, (7.22), (7.57).
$\mathbf{K}^e, \mathbf{K}$	- matrizes de rigidez do elemento $e$ e matriz global.
$\mathbf{F}^e, \mathbf{F}$	- vetor força nodal do elemento $e$ e força global.
$\mathbf{U}^e, \mathbf{U}$	- vetor deslocamento nodal do elemento $e$ e deslocamento global.
$\mathbf{B}^e$	- matriz de deformação no elemento $e$ .
$(r; s)$	- coordenadas intrínsecas do elemento $e$ , (18.4).
$N_i^e(r, s)$	- função base num elemento $e$ , Seção 18.1.1.

## Lista de tabelas, fluxogramas e sumários

Item	Conteúdo	Página
Tab. 1.1	Propriedades mecânicas típicas de alguns materiais em forma de fibra	6
Tab. 1.3	Propriedades mecânicas típicas de alguns materiais em bloco	8
Tab. 1.4	Propriedades de alguns compostos laminados	9
Tab. 1.5	Propriedades termomecânicas de alguns compostos fibrados comerciais	10
Tab. 1.8	Propriedades típicas de monocristais	16
Tab. 1.9	Vantagens e desvantagens dos polímeros em relação a outros materiais	19
Tab. 1.10	Propriedades típicas de alguns polímeros	19
Tab. 3.1	Lista de normas da ASTM de ensaios de compostos reforçados por fibras	50
Sec. 5.1.3	Síntese das equações diferenciais de viga	117
Sec. 5.2	Fórmulas para vigas	119
Sec. 5.2.1	Fatores de cisalhamento $k$ para vigas isotrópicas	124
Fig. 6.7	Fluxograma para análise de tensões nas lâminas de um laminado	137
Tab. 6.1	Fluxograma de análise de resistência de um laminado, sem temperatura	153
Tab. 7.1	Fluxograma de cálculo de cargas limites para laminados compostos, incluindo efeitos higrotérmicos e esforços iniciais	183
Tab. 9.2	Alguns adesivos estruturais comerciais	246
Tab. 9.3	Combinações recomendadas de adesivo e aderentes	246
Tab. 9.4	Propriedades típicas de alguns tipos de colmeia de folha de alumínio	254
Tab. 9.5	Propriedades de alguns tipos de colmeia de resina reforçada	255
Tab. 9.6	Outras normas de ensaio aplicadas a sanduíches	259
Tab. 9.7	Propriedades típicas de espumas e outros materiais usados em sanduíche	260
Tab. 9.8	Propriedades típicas de faces de sanduíches	261
Tab. 10.1	Fatores $K_j$ para solução de flexão de painel-sanduiche retangular	277
Sec. 10.6	Rotinas de cálculo para sanduíches	281

## Unidades

O livro usa unicamente o Sistema Internacional de Unidades, SI. Entretanto, em algumas partes do mundo ainda se usam e publicam trabalhos e resultados em “sistemas” distintos. Por isso, coletamos algumas correspondências que podem facilitar ao leitor a interpretação de valores obtidos em diversas fontes.

Quantidade Física	“sistema” inglês para SI ou métrico
Comprimento	1 pé = 0,3048 m 1 pol = 25,4 mm (valor exato)
Área	1 pé <sup>2</sup> = 0,092903 m <sup>2</sup> 1 pol <sup>2</sup> = 645,16 mm <sup>2</sup>
Volume	1 pé <sup>3</sup> = 0,028317 m <sup>3</sup> 1 pol <sup>3</sup> = 16.387,064 mm <sup>3</sup> 1 galão (gal) = 3,785412·10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
Densidade	1 lb <sub>m</sub> /pé <sup>3</sup> = 15,394 kg/m <sup>3</sup> 1 lb <sub>m</sub> /pol <sup>3</sup> = 26.600,3 kg/m <sup>3</sup>
Massa	1 lb <sub>m</sub> = 0,4535924 kg 1 ton = 2.000 lb <sub>m</sub> = 907,1847 kg
Força	1 lb <sub>f</sub> = 4,448222 N = 0,4535924 kgf
Momento	1 lb <sub>f</sub> pol = 11,52125 kgf·mm = 112,9848 N·mm
Pressão, tensão	1 lb <sub>f</sub> /pol <sup>2</sup> ≡ 1 psi = 6.894,757 N/m <sup>2</sup> 1 N/m <sup>2</sup> = 1 Pascal = 1 Pa = 10 <sup>6</sup> N/mm <sup>2</sup> 1 lb <sub>f</sub> /pe <sup>2</sup> = 47,88026 N/m <sup>2</sup>
Energia, calor	1 Btu = 1,05504 kJ 1 Joule (J) = 1 N·m
Fluxo de calor ou Potência	1 Btu/h = 0,29307 W 1 Watt (W) = 1 Nm/s 1 hp = 746,499 W
Fluxo de calor por unidade de área	1 Btu/h pe <sup>2</sup> = 3,154 W/m <sup>2</sup>
Calor específico	1 Btu/lb <sub>m</sub> °F = 4,1869 kJ/kg°C
Condutividade térmica	1 Btu/h pe°F = 1,7307 W/m°C
Temperatura	°F = 9°C/5 + 32
Variação da temperatura	Δ°F = 9Δ°C/5