Capítulo 2

Revisão de elasticidade linear

Neste capítulo há uma breve revisão de alguns elementos básicos da mecânica do contínuo, que serão úteis no tratamento de laminados compostos feito na Parte I deste livro. Uma das primeiras hipóteses usada na teoria de materiais compostos é que eles se comportam de forma elástica e linear – são duas definições distintas. O comportamento elástico significa que, se o corpo for carregado, após o descarregamento ele retornará completamente às suas formas e dimensões originais, sem apresentar nenhuma deformação residual. O comportamento linear pode ser entendido como uma proporcionalidade entre carregamento e resposta. Por exemplo, se os módulos das forças forem multiplicados por um mesmo fator c, um corpo que exibe comportamento linear teria seus deslocamentos, suas deformações e tensões em cada ponto multiplicados pelo mesmo fator c. Em geral, um comportamento linear de um material é obtido aplicando-se valores de tensões, deformações, deslocamentos e rotações suficientemente pequenos.

2.1 Tensões

Consideremos um corpo em equilíbrio sob a ação das forças F_1, $F_2, \cdots, F_n$, como ilustrado na Figura 2.1a. Observe que **se o corpo como um todo está em equilíbrio estático, cada parte dele também está**. A Figura 2.1b mostra o diagrama de corpo livre de uma parte do corpo, designada como A, definido pelo corte de um plano imaginário. Esse corte define uma superfície S, cujo vetor normal unitário é $\mathbf{n}$, de componentes $\mathbf{n} = \{n_x; n_y; n_z\}^T$ nas direções cartesianas.[1] A parte A do corpo está sujeita a forças aplicadas em sua superfície externa, e a forças internas distribuídas sobre a superfície interna S. Estas forças internas são distribuídas continuamente sobre a superfície de forma semelhante às forças hidrostáticas ou à pressão do vento atuando sobre uma superfície externa de um corpo. Entretanto, as forças internas não atuam apenas perpendicularmente à superfície interna, elas possuem componentes tangentes à superfície, atuando de forma semelhante a um atrito interno. Identifica-se um elemento de área ΔA localizado num ponto genérico de coordenada P da seção S. Nesse elemento atua a força $\Delta\mathbf{F}_i$, um vetor geralmente não normal à superfície S. O limite de $\Delta\mathbf{F}_i/\Delta A$ quando $\Delta A \to 0$ é a tensão no ponto P, com unidades de força/área. Em geral a tensão é expressa através de suas componentes, uma normal à superfície e duas tangentes, essas chamadas componentes de tensão normal e cisalhantes.

Usa-se normalmente a letra grega σ (sigma minúsculo) para designar as tensões normais, e τ (tau minúsculo) para as tensões cisalhantes. Uma componente de tensão não depende apenas do ponto P, onde ela é calculada, mas também da direção da força que a gerou e da direção do vetor normal à superfície onde ela atua, i.e., a orientação da face. No corpo mostrado na Figura 2.1a, pode-se passar um plano pelo ponto P, perpendicular ao eixo x, ou seja, um plano normal ao vetor unitário de componentes $\mathbf{n} = \{1; 0; 0\}^T$ (Figura 2.2). Dentre as infinitas direções em que se pode decompor o elemento de força $\Delta\mathbf{F}$ tangencialmente ao plano, as direções de escolha mais óbvias são y e z. Desta forma as três componentes de tensão no ponto P do plano definido por $\mathbf{n}$ são

[1] O sobrescrito "t" será sempre usado no texto para indicar o transposto de um vetor ou uma matriz.

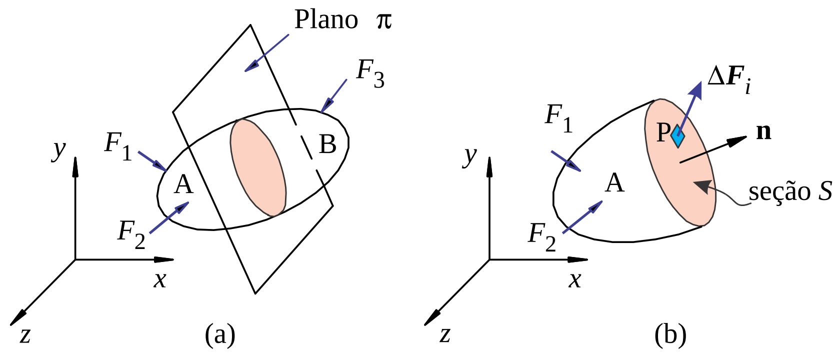

Figura 2.1: (a) Corpo em equilíbrio dividido em duas partes, A e B; (b) forças internas aplicadas na parte A.

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{ix}}{\Delta A}, \qquad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{iy}}{\Delta A} \quad \text{e} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_{iz}}{\Delta A}. \tag{2.1}$$

O primeiro índice refere-se à orientação da superfície; o segundo, à direção da força. Em geral, as tensões normais são indicadas apenas por um índice, uma vez que eles sempre são repetidos.

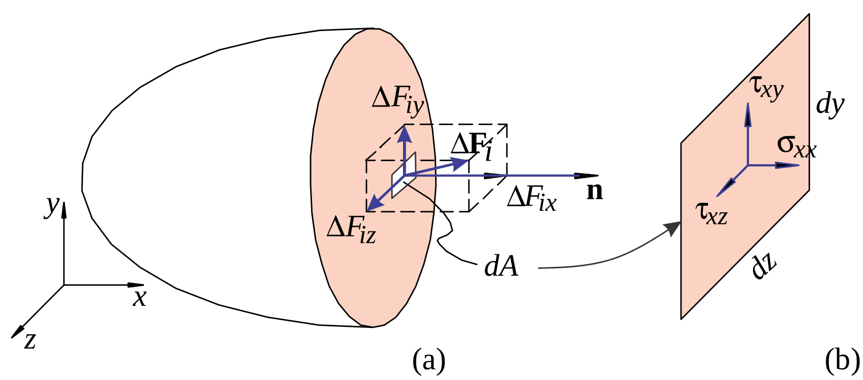

Figura 2.2: Componentes de força e de tensão num plano normal ao eixo x.

Consideremos novamente o ponto na coordenada P na Figura 2.1. Por este ponto podem passar infinitos planos, e para cada um deles teremos três componentes de tensões. Prova-se que o estado de tensões no ponto pode ser determinado por apenas seis planos, paralelos dois a dois. Tem-se então um elemento diferencial em torno do ponto P, em forma de paralelepípedo de dimensões $dx \times dy \times dz$ visto na Figura 2.3, com faces orientadas em $\pm x$, $\pm y$ e $\pm z$. São, portanto, seis faces, definindo 18 componentes de tensões. Como será visto mais adiante, as componentes de tensão em qualquer plano oblíquo podem ser obtidas a partir destas componentes-padrão.

As componentes na face orientada na direção $\mathbf{n} = \{1; 0; 0\}^T$ são σ_x, τ_{xy} e τ_{xz}, enquanto as tensões na face $\mathbf{n} = \{-1; 0; 0\}^T$ são também denominadas σ_x, τ_{xy} e τ_{xz}. Isso significa que temos apenas 9 componentes de tensões em vez de 18. Essas nove componentes compõem uma entidade matemática denominada **tensor de segunda ordem**. Elas podem ser organizadas em forma matricial como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

O equilíbrio de momentos do elemento diferencial da Figura 2.3 requer que as componentes do tensor tensão sejam simétricas, isto é, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, ou seja, o estado de tensões num ponto é completamente conhecido quando se conhece as seis componentes do tensor tensão em relação a um sistema de coordenadas cartesianas $x - y - z$ qualquer.

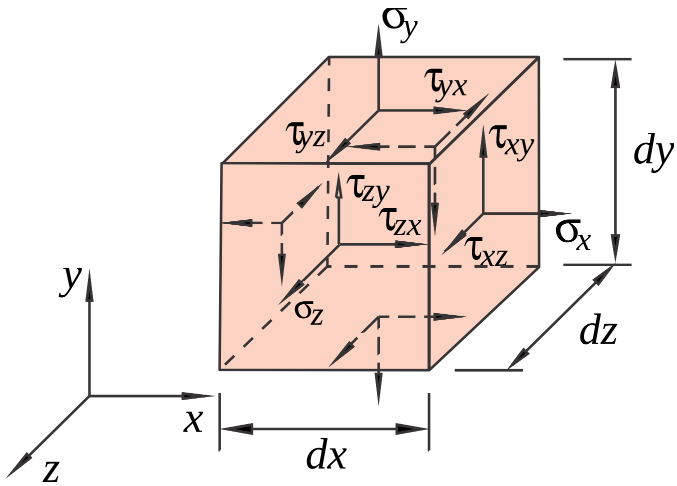

Figura 2.3: Elemento diferencial no ponto P e as componentes de tensão.

2.2 Deslocamentos e deformações

Consideremos o corpo mostrado na Figura 2.4, sob a ação de um conjunto de forças externas. Designamos sua configuração inicial, descarregada, por Ω_0, e sua configuração final, deformada, por Ω_1. Cada ponto em Ω_0, como os pontos P e Q, desloca-se para as posições P′ e Q′. Esse **deslocamento** é diferente para cada ponto, portanto, é uma função das coordenadas $\{x; y; z\}^T$ de cada ponto. Adicionalmente, ele tem um caráter vetorial: o deslocamento do ponto na coordenada P para a posição P', por exemplo, pode ser representado pelo vetor $\overrightarrow{PP'}$, cujo módulo é o valor da distância entre os dois pontos, e a direção é definida pelo segmento orientado $P \to P'$. Observa-se que aqui não consideramos que o ponto se move em linha reta. O vetor deslocamento apenas indica a posição final em relação à inicial.

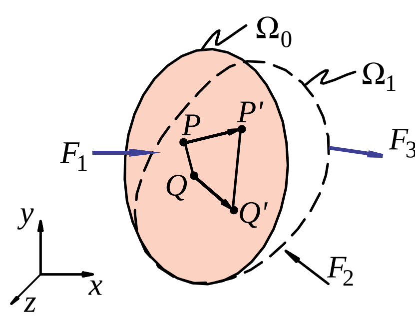

Figura 2.4: Deformação de um corpo.

Em se tratando de um vetor, suas componentes são definidas em relação a um sistema de coordenadas x-y-z qualquer. Essas componentes são os **deslocamentos** u, v e w nas direções x, y e z, respectivamente. Em síntese, essas componentes são funções do ponto, isto é,

$$u = u\,(x, y, z)\,, \qquad v = v\,(x, y, z)\,, \qquad w = w\,(x, y, z)\,. \tag{2.3}$$

Consideremos a seguir as **deformações**. A expansão em série de Taylor de $u\,(x, y, z)$ na direção x retendo apenas o termo linear é:

$$u\,(x + \delta x, y, z) = u\,(x, y, z) + \frac{\partial u\,(x, y, z)}{\partial x}\delta x + E. \tag{2.4}$$

O lado esquerdo é o deslocamento num ponto próximo à posição $P = \{x, y, z\}^T$, isto é, em $\mathbf{Q} = \{x + \delta x, y, z\}^T$. Esse deslocamento em $\mathbf{Q}$ é aproximado no lado direito como o deslocamento em $\{P\}$,

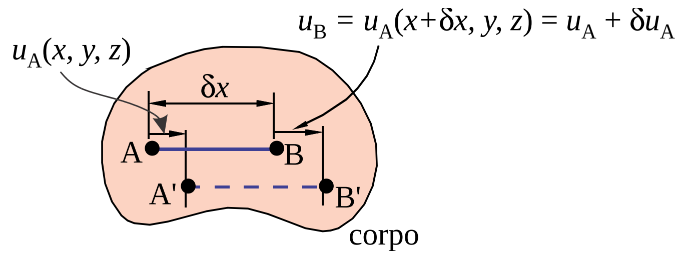

Figura 2.5: Extensão de um segmento no interior de um corpo.

mais uma variação $\delta u = (\partial u/\partial x)\,\delta x$ e mais um erro E proveniente do truncamento da série. Se os deslocamentos e gradientes forem suficientemente pequenos, como é usual em muitas estruturas em engenharia, é possível utilizar apenas

$$u\,(x+\delta x, y, z) = u\,(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x}\,\delta x. \tag{2.5}$$

Esta é então uma teoria linear, a qual incorre no erro E. Em seguida, define-se

$$\delta u|_x = u\,(x+\delta x, y, z) - u\,(x, y, z)\,, \tag{2.6}$$

como a variação de comprimento da componente x do segmento $\overline{\mathrm{PQ}}$. Então, de (2.5) tem-se

$$\delta u_x = \frac{\partial u\,(x, y, z)}{\partial x}\,\delta x. \tag{2.7}$$

Isso significa que $\partial u/\partial x$ é a **deformação específica na direção** x, denotada por ε_x:

$$\varepsilon_x\,(x, y, z) = \frac{\partial u\,(x, y, z)}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Esta deformação tem o caráter de uma variação do comprimento de um segmento de reta, dividido pelo seu comprimento inicial, sendo que esse comprimento inicial é de dimensões infinitesimais.

A definição acima pode também ser interpretada considerando o segmento $\overline{AB}$ na Figura 2.5. Para simplificar, consideramos que ele é paralelo ao eixo x em suas configurações inicial e final. O comprimento inicial do segmento $\overline{AB}$ é δx, enquanto o comprimento final é $\delta x + \delta u$, onde $\delta u = u_B - u_A$. Comparando com a notação anterior, temos que $\delta u \equiv \delta u|_x$, uma vez que o segmento é orientado na direção x. A deformação de engenharia é dada por $\delta u/\delta x$, e a deformação específica ε_x é, então,

$$\varepsilon_x = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\partial u\,(x, y, z)}{\partial x}, \tag{2.9}$$

como visto em (2.8).

O procedimento acima pode ser repetido para os segmentos orientados nas direções y e z, resultando em mais duas componentes de deformações específicas que, juntadas à componente (2.8), resultam no conjunto completo de **componentes de deformações específicas normais**:

$$\varepsilon_x\,(x, y, z) = \frac{\partial u\,(x, y, z)}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y\,(x, y, z) = \frac{\partial v\,(x, y, z)}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z\,(x, y, z) = \frac{\partial w\,(x, y, z)}{\partial z}. \tag{2.10}$$

A caracterização completa do estado de deformações de um ponto exige a determinação de mais três componentes de deformações, não de caráter extensional mas angular, chamadas **deformações cisalhantes ou angulares**. Enquanto as deformações específicas vistas em (2.10) são extensionais, isto é, dão informação sobre a variação do comprimento relativo de um segmento de material reto; a deformação cisalhante dá informação sobre variações no ângulo interno formado por dois segmentos inicialmente perpendiculares.

Qualitativamente, a deformação cisalhante é vista na Figura 2.6. Considere dois segmentos de

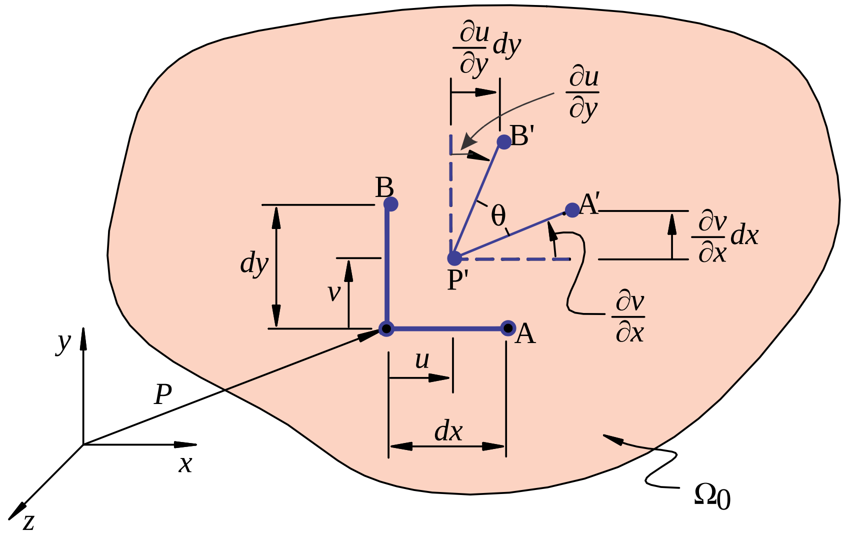

Figura 2.6: Deformação cisalhante.

reta, $\overline{\mathrm{PA}}$ e $\overline{\mathrm{PB}}$, inicialmente formando um ângulo reto e orientados nas direções x e y, respectivamente. Após a deformação, os pontos sofrem deslocamentos e os segmentos $\overline{\mathrm{P'A'}}$ e $\overline{\mathrm{P'B'}}$ formam um ângulo θ. Assim, a deformação cisalhante é definida como o ângulo interno $\pi/2 - \theta$ no ponto, no limite, quando os comprimentos tendem a zero.

Tomamos, como na Figura 2.6, um segmento inicialmente orientado em x e outro em y. Se os deslocamentos forem suficientemente pequenos tanto quanto os seus gradientes, os ângulos de variação podem ser aproximados por $\partial u/\partial y$ e $\partial v/\partial x$, definindo-se

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.11}$$

Analogamente, tomando segmentos nos planos xz e yz obtêm-se duas outras componentes de deformação:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2.12}$$

de forma que o conjunto completo das **relações deformações-deslocamentos lineares** é:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2ex] \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{array}} \tag{2.13}$$

Observa-se que estas relações são lineares no sentido de não envolverem produtos do tipo $(\partial u/\partial x)^2$ ou $\partial u/\partial x \times \partial v/\partial y$, por exemplo. As relações deformações-deslocamentos completas vistas na relação (11.36) envolvem mais alguns termos deste tipo e dão bons resultados apenas se tivermos pequenas deformações e pequenas rotações. Este "pequeno", em geral não é precisamente definido, mas os erros incorridos estão numa faixa aceitável em engenharia, $\approx 5\%$, se $\varepsilon \lesssim 5\%$ e $\gamma \lesssim 5°$, e se a rotação de qualquer elemento for menor que $5°$. Esta faixa de ângulos é aquela em que $\tan\alpha \approx \operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$ (desde que se usem radianos). Obviamente, os erros incorridos dependem das características de cada problema.

2.3 Relações tensão-deformação – Lei de Hooke

As relações entre as 6 componentes de tensão e as 6 de deformação dependem do tipo do material e em geral só podem ser obtidas experimentalmente. Sucintamente apresentaremos aqui o conjunto de **relações tensão-deformação lineares para materiais isotrópicos**, também chamado lei de Hooke, embora não seja uma lei nem tenha sido elaborado por Hooke nesta forma. As relações são as seguintes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Uma vez que nos capítulos seguintes a notação matricial será usada intensamente, podemos re-escrever (2.14) como

$$\boldsymbol{\varepsilon}^x = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}^x, \quad \text{onde} \longrightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^x &= \left\{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}; \tau_{yz}\right\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^x &= \left\{\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z; \gamma_{xy}; \gamma_{xz}; \gamma_{yz}\right\}^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ sim. & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

O sobrescrito x em ε^x e σ^x indica que as componentes estão relacionadas ao sistema de coordenadas x-y-z. A matriz $[S]$ é a **matriz de flexibilidade do material**. As constantes de material são E, o Módulo de Young ou módulo de elasticidade longitudinal obtido num ensaio uniaxial onde $E = \sigma_x/\varepsilon_x$. G e ν são o módulo de elasticidade cisalhante e o coeficiente de Poisson, respectivamente. Prova-se, [129], que o material isotrópico linear possui apenas duas constantes de material independentes relacionadas por $G = E/2\left(1+\nu\right)$. Nos Capítulos 3 e 4 apresentaremos novas constantes elásticas e as formas generalizadas da lei de Hooke para materiais ortotrópicos, que serão extensivamente usadas para o tratamento de materiais compostos.

2.4 Equações de equilíbrio

As componentes do tensor tensão devem satisfazer às seguintes **equações de movimento**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho\, b_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho\, b_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho\, b_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde t é o tempo; b_x, b_y e b_z são as componentes das forças de corpo por unidade de massa, e ρ é a densidade volumétrica do material. Os termos à direita são as forças de inércia por unidade de volume. Na Parte I deste livro consideram-se apenas casos em que o elemento diferencial está em equilíbrio, isto é, as acelerações do lado direito são nulas, o que resulta nas chamadas **equações diferenciais**

de equilíbrio.

2.5 Estado plano de tensões e transformação de tensões

Considere um corpo em forma de placa, como na Figura 2.7, de forma plana e espessura h bem menor que qualquer uma das dimensões no plano. Se um corpo deste tipo for carregado por forças paralelas ao plano da placa, o plano $x - y$, e distribuídas uniformemente ao longo da espessura, as componentes transversais de tensão σ_z, τ_{xz} e τ_{yz} são nulas em ambas as faces da placa. Caso a espessura seja suficientemente pequena pode-se usar a aproximação de que estas tensões serão nulas em qualquer ponto da placa, isto é,

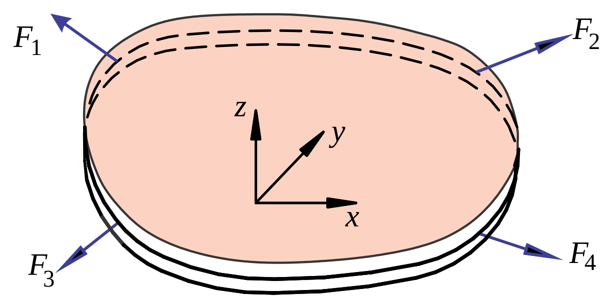

Figura 2.7: Corpo plano delgado submetido a forças coplanares.

$$\sigma_z\,(x,y,z) = \tau_{xz}\,(x,y,z) = \tau_{yz}\,(x,y,z) = 0, \quad \text{para} \quad \forall\ (x,y,z) \in \Omega. \tag{2.17}$$

Um estado de tensões especificado apenas por σ_x, σ_y e τ_{xy} é denominado de **Estado Plano de Tensões (EPT)**, e as relações tensão-deformação (2.14) simplificam-se para

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right], & \gamma_{xz} &= 0, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right), & \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

As equações envolvendo as deformações no plano $x - y$, ε_x, ε_y e γ_{xy} podem ser invertidas para produzirem as tensões coplanares:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y), \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x), \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{G}\gamma_{xy}. \tag{2.19}$$

Introduzindo as expressões de σ_x e σ_y na expressão para ε_z em (2.18) temos

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \tag{2.20}$$

Note que o estado de tensões é plano, mas o de deformações é triaxial. Porém, conhecidas as componentes ε_x e ε_y pode-se obter ε_z de (2.20), de forma que há apenas três componentes de tensão, σ_x, σ_y e τ_{xy}, e três de deformação, ε_x, ε_y e γ_{xy}, como incógnitas independentes a serem determinadas num problema plano.

2.5.1 Transformação plana de tensões

Em geral, os eixos cartesianos x, y e z são escolhidos em um problema de forma a simplificar o processo de modelagem, interpretação ou solução. Freqüentemente, a geometria ou o carregamento sugerem um sistema de eixos particular. No caso da placa da Figura 2.7, por exemplo, é quase imperativo fazer que um dos eixos seja perpendicular ao plano da placa e os demais estejam sobre o plano. Num problema que envolve um corpo cilíndrico é natural que um dos eixos contenha o eixo de revolução, ou que um par de eixos seja colocado tangente à superfície.

O processo de solução, seja analítico ou numérico, fornece as tensões em cada ponto, no sistema $x-y-z$ escolhido. Por sua vez, a falha do material em geral não está relacionada diretamente a essas componentes de tensão, mas com as componentes segundo algum outro sistema de eixos. Dessa forma, determinada a solução das tensões conforme um sistema de eixos, usam-se fórmulas que transformam estas componentes para um outro sistema.

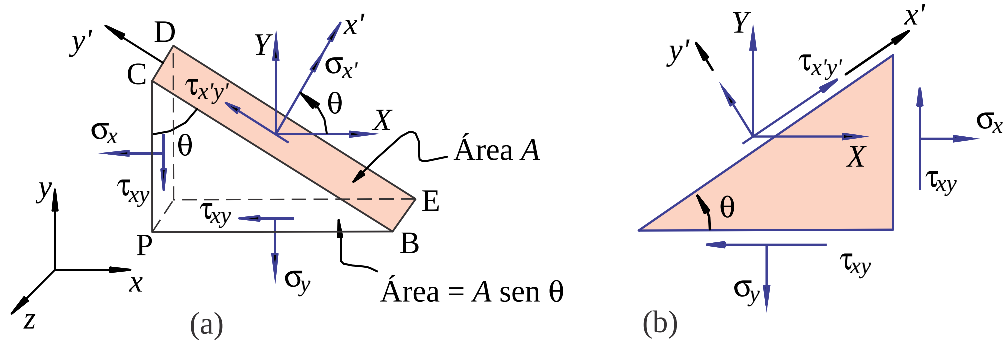

Figura 2.8: Diagrama de corpo livre de um elemento diferencial triangular de Cauchy para (a) seção normal ao eixo x' e (b) seção normal ao eixo y'.

Uma das formas simples de se obter as expressões para transformação de tensões é aquela mostrada a seguir. Inicialmente, considera-se que, se o corpo está em equilíbrio estático, cada parte dele também está. Pode-se então fazer o diagrama de corpo livre de um elemento triangular de Cauchy, como na Figura 2.8a, com uma face normal ao eixo x'. Considere aqui, portanto, apenas o estado do plano de tensões. Nas faces paralelas aos eixos x e y, indica-se as componentes de tensão conhecidas σ_x, σ_y e τ_{xy}. A superfície BCDE tem área dA e inclinação definida pelo ângulo θ em relação ao eixo y. Ali as componentes de tensão são desconhecidas e podem ser decompostas em uma componente normal, $\sigma_{x'}$, e uma tangente $\tau_{x'y'}$. A determinação dessas componentes é feita usando as equações de equilíbrio como segue.

Primeiramente, indicam-se por X e Y as tensões nas direções x e y que atuam na face oblíqua. Por equilíbrio de forças nas direções x e y, estas forças se relacionam às tensões nas outras faces por:

$$\begin{aligned} dA\,X &= \sigma_x\,dA\cos\theta + \tau_{xy}\,dA\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ dA\,Y &= \sigma_y\,dA\,\mathrm{sen}\,\theta + \tau_{xy}\,dA\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Estas forças podem ser recombinadas nas direções normal x' e tangencial y' como:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'}\,dA &= dAX\cos\theta + dAY\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ \tau_{x'y'}\,dA &= dAY\cos\theta - dAX\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Simplificando a área dA e substituindo (2.21) em (2.22) obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y^2\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta, \\ \tau_{x'y'} &= \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta\right) + (\sigma_y - \sigma_x)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde θ é o ângulo entre o eixo x' e x, positivo quando anti-horário em relação ao eixo z.

Considere agora um elemento de dimensões diferenciais com a forma mostrada na Figura 2.8b, com uma face normal ao eixo y'. Essa face oblíqua é perpendicular àquela da Figura 2.8a. O eixo y' faz um ângulo $\theta + \pi/2$ com o eixo x. Então a tensão normal $\sigma_{y'}$ pode ser obtida usando $\theta + \pi/2$ em lugar de θ em (2.23a). Considerando que $\mathrm{sen}\,(\theta + \pi/2) = \cos\theta$ e $\cos(\theta + \pi/2) = -\,\mathrm{sen}\,\theta$, tem-se:

$$\sigma_{y'} = \sigma_x\,\mathrm{sen}^2\theta + \sigma_y\cos^2\theta - 2\tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta. \tag{2.24}$$

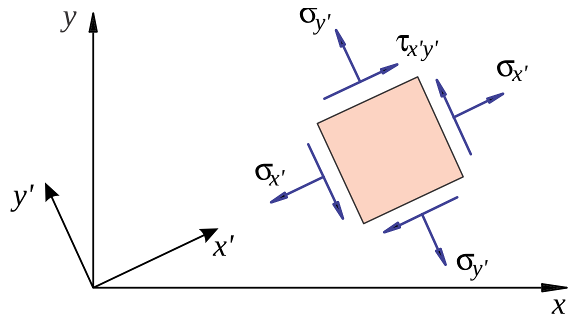

Figura 2.9: Componentes de tensão no sistema de eixos x' y' z.

As componentes de tensão num elemento diferencial alinhado ao novo sistema de coordenadas, é ilustrado na Figura 2.9.

Juntando as equações (2.23) e (2.24) obtêm-se as equações de transformação de tensões no plano xy, isto é, as componentes do tensor tensão em relação a um sistema x' y' z em termos das componentes no sistema xyz:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y^2 \operatorname{sen}\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\
\sigma_{y'} &= \sigma_x^2 \operatorname{sen}\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\
\tau_{x'y'} &= \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + (\sigma_y - \sigma_x)\operatorname{sen}\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Esta transformação pode ser expressa em forma matricial como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{x'} = \mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}^{x}, \quad \text{onde} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l}
\boldsymbol{\sigma}^{x'} = \left\{\sigma_{x'}; \sigma_{y'}; \tau_{x'y'}\right\}^T, \\
\boldsymbol{\sigma}^{x} = \left\{\sigma_{x}; \sigma_{y}; \tau_{xy}\right\}^T, \\
\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}^2\theta & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta & \cos^2\theta & -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \end{bmatrix}
\end{array} \right. \tag{2.26}$$

$\mathbf{T}$ é a chamada **matriz de transformação**. As operações de transformação acima são as mesmas representadas graficamente pelo círculo de Mohr.

As deformações transformam-se de forma semelhante, usando a mesma matriz de transformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{x'} = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon}^{x}, \qquad \text{onde} \qquad \left\{ \begin{array}{l}
\boldsymbol{\varepsilon}^{x'} = \left\{\varepsilon_{x'}; \varepsilon_{y'}; \gamma_{x'y'}/2\right\}^T, \\
\boldsymbol{\varepsilon}^{x} = \left\{\varepsilon_{x}; \varepsilon_{y}; \gamma_{xy}/2\right\}^T.
\end{array} \right.$$

Observe que a inversa de $\mathbf{T}$ pode ser obtida simplesmente substituindo θ por $-\theta$ em (2.26), o que resulta em:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \operatorname{sen}^2\theta & -2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

2.6 Exercícios

2.1 Uma placa fina de aço está submetida a carregamentos tais que o estado de tensões num certo ponto em relação aos eixos xy, é aquele mostrado na Figura 2.10a. Deseja-se obter o conjunto de componentes de tensão relativas aos eixos $x'y'$, tal que x' é obtido por rotação anti-horária de 60° em torno do eixo z. Obtenha a matriz de transformação $\mathbf{T}$, e mostre as tensões num elemento orientado nas direções $x'y'$.

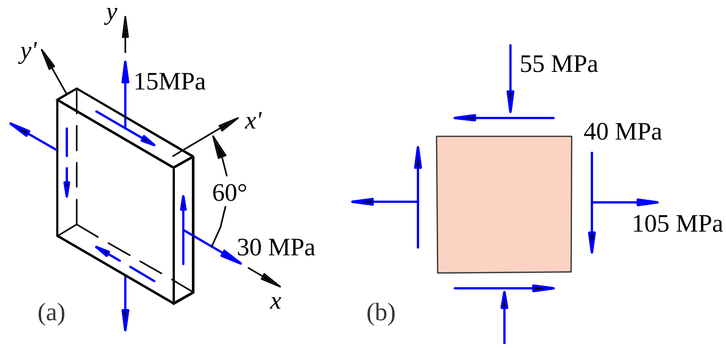

Figura 2.10: Dados para os Exercícios 1 e 2.

2.2 O estado de tensões num ponto é aquele indicado na Figura 2.10b. (a) Calcule as tensões principais. (b) Encontre as tensões cisalhantes máxima e mínima. Em ambos os casos mostre as tensões num elemento físico de dimensões diferenciais orientado segundo os eixos apropriados e os ângulos em relação ao eixo x. (Solução: $\sigma_1 = 114,4$ MPa, $\sigma_2 = -64,4$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\overline{\theta} = -13,28°$, $\tau_{\max} = -89,44$ MPa, $\overline{\theta} = 31,72°$).

2.3 Obtenha a forma inversa da Lei de Hooke (2.15), isto é, a matriz de rigidez do material [**C** tal que $\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}^x$.